lógica simbólica

IRVING M. COPI

CECSA

LOGICA SIMBOLICA

Irving M. Copi

CECSA

EP9

LOGICA SIMBOLICA

LOGICA SIMBOLICA

IRVING M. COPI

University of Hawaii

VIGÉSIMA REIMPRESIÓN
MÉXICO, 2001

COMPAÑÍA EDITORIAL CONTINENTAL

Para establecer comunicación con nosotros puede hacerlo por:

correo:
Renacimiento 180, Col. San Juan Tlihuaca, Azcapotzalco,
02400, México, D.F.

fax pedidos:
(015) 561 4063 • 561 5231

e-mail:
info@patriacultural.com.mx

home page:
http://www.patriacultural.com.mx

Título original de la obra:
SYMBOLIC LOGIC

Traducción:
Andrés Sestier Boulier, M. en C.

bajo el sello de Compañia Editorial Continental
Renacimiento 180, Col. San Juan Tlihuaca
Delegación Azcapotzalco, C.P. 02400, México, D.F.

Miembro de la Cámara Nacional de la Industria Editorial
Registro núm. 43

ISBN 968-26-0134-7

Impreso en México
Printed in Mexico

Segunda edición: 1979
Décima novena reimpresión: 2000
Vigésima reimpresión: 2001

Para AMELIA

Prefacio

El enfoque general de este libro es el mismo de las ediciones anteriores. De acuerdo con Aristóteles, consideramos a la lógica desde dos puntos de vista distintos: Por un lado, la lógica es un instrumento orgánico para apreciar (o evaluar) la corrección del razonamiento; por otro lado, los principios y los métodos de la lógica usada como un instrumento *orgánico* son temas de interés e importancia para investigarlos en forma sistemática. Este enfoque dual de la lógica es, en especial, apropiado para la lógica simbólica moderna. A través del desarrollo de sus símbolos especiales la lógica ha llegado a ser incomparablemente más poderosa como instrumento de análisis y deducción. Y los principios y los métodos de la lógica simbólica se investigan de manera fructífera por medio del estudio de los sistemas logísticos.

En la primera mitad de este libro, los Caps. 1 a 5, se presentan las notaciones, los métodos y principios estándar de la lógica simbólica que se *usan* al determinar la validez o invalidez de los argumentos. En esta parte se consideran sucesivamente los modos cada vez más complejos de argumentación: primero aquellos cuya validez tiene que ver con los compuestos función de verdad* de enunciados simples; después, los que involucran los tipos más simples de cuantificación; luego las cuantificaciones múltiples más complejas, y por último, los argumentos relacionales. Se introducen los métodos estándar de las tablas de verdad, las reglas de inferencia, los modos de prueba condicional e indirecto y la teoría de la cuantificación por medio de las técnicas de "deducción natural". Se desarrolla en un capítulo aparte la lógica de las relaciones, que incluye la teoría de la identidad, las descripciones definidas, los predicados de tipo superior y la cuantificación de las variables predicativas Se incluyen numerosos ejercicios para ayudar al estudiante a adquirir un dominio práctico del material.

* También se llama a esta composición, *composición veritativo-funcional.* (N. del T.)

La segunda mitad del libro contiene un tratamiento sistemático de los principios lógicos que *se usan* en la primera mitad. Después de un breve estudio de los sistemas deductivos en general, se desarrolla un cálculo proposicional de acuerdo con los estándares de rigor modernos más elevados, y se prueba que es consistente y completo. Se presentan notaciones y fundamentos axiomáticos alternativos para los cálculos proposicionales, y entonces, se desarrolla un cálculo funcional de primer orden. Se muestra que este último es equivalente a los métodos de "deducción natural" de la primera mitad del libro, y también se demuestra que es consistente y completo.

Hay tres apéndices: el primero presenta las Expansiones Booleanas como un método algebraico de evaluación de la corrección de los argumentos función de verdad; el segundo trata del álgebra de clases, y el tercero de la teoría ramificada de los tipos.

Esta cuarta edición de *Lógica Simbólica* difiere de las anteriores en muchos aspectos. Uno es de organización puramente: la regla de Prueba Condicional Reforzada pasa del Cap. 4 al Cap. 3, donde se le puede usar al trabajar con argumentos puramente de función de verdad. Otros aspectos en que la nueva edición difiere son los siguientes. En la Sec. 1.2 hay un examen un tanto más cuidadoso de las distinciones entre enunciados, proposiciones y oraciones. En la Sec. 2.1 se presta atención al papel que desempeñan palabras como "o", "ni", "ambos" y frases como "ni ... ni..." y "a menos que" y al significado que tiene la posición que ocupa la palabra "no" en enunciados compuestos. En la Sec. 2.3 se enuncia más explícitamente lo que se supone al desarrollar la lógica de las funciones de verdad. En la Sec. 3.2 se sugieren otras reglas prácticas para encontrar las pruebas formales de validez. En la Sec. 7.6 se da una mejor prueba del Metateorema V. En la Sec. 8.2 señalamos el peligro de la definición "creativa" y se presenta una prueba diferente de la completud deductiva del sistema de Hilbert-Ackermann que da al estudiante una visión de dos métodos independientes y muy distintos para establecer resultados de completud deductiva de cálculos proposicionales. En la Sec. 9.1 hay una prueba más sencilla de consistencia para el cálculo de primer orden. Se agrega una nueva Sec. 9.7 en la que se deriva la teoría de la identidad a partir de un solo esquema de axioma adicional, siguiendo una sugestión del profesor Hao Wang.

La primera mitad del libro está escrita para ayudar a los estudiantes a adquirir dos habilidades distintas. Una es la habilidad de analizar enunciados y argumentos del lenguaje ordinario y traducirlos a las notaciones de la lógica simbólica. La otra es la habilidad para aplicar las técnicas y los métodos de la lógica simbólica a la determinación de la validez o invalidez de los argumentos ya simbolizados. Cuando en un problema se necesitan las dos técnicas, un error de traducción puede anular el ejercicio de apreciación de la validez. En consecuencia, se proponen más ejercicios para ayudar al estudiante a desarrollar estas habilidades por separado. Más ejercicios de simbolización se han insertado en los Caps. 2, 4 y 5 y nuevos argumentos ya simbolizados se insertaron en los Caps. 3, 4 y 5 como ejercicios de apreciación de la validez. En esta nueva edición aparecen más de doscientos nuevos ejercicios: ejercicios de traducción al lenguaje simbólico y ejercicios de estimación de la validez; algunos ejercicios nuevos para ayudar al estudiante a reconocer las formas y las formas específicas de los enunciados y los argumentos; y algunos respecto a diferentes sistemas de axiomas de los cuales hay que probar la independencia, la consistencia y la completud.

Numerosos profesores de lógica han tenido la amabilidad de sugerir maneras de mejorar el libro. He considerado con sumo interés todos los consejos recibidos, aunque no he podido incorporar todos los cambios sugeridos. Por las útiles sugestiones comunicadas estoy de manera especial agradecido con el profesor Alan Ross Anderson de la Universidad de Pittsburgh, Lynn Aulick del Cedar Crest College, William F. Barr del State University of New York College en Cortland, Walter A. Bass de la Universidad Estatal de Indiana, Robert W. Beard de la Universidad Estatal de Florida, Richard Beaulieu de París, James C. Bohan Jr., de la Universidad Estatal de Wichita, Murray Braden del Malcalyster College, Lorin Browning del College of Charleston, Mario Bunge de la Universidad McGill, David R. Dilling del Grace College, Earl Eugene Eminhizer de la Universidad Estatal de Youngstown, Barry R. Gross del York College, Universidad de la Ciudad de Nueva York, Herbert Guerry de la Universidad Estatal de Idaho, James N. Hullett de la Universidad de Boston, R. Jennings de la Universidad Simon Fraser, Robert W. Loftin de la Universidad Stetson, Warren Matthews del Old Dominion College, Robert W. Murungi de la Universidad de Dubuque, Jean Porte del Centre National de la Recherche Scientifique, Samuel A. Richmond de la Universidad Estatal de Cleveland, Donald Scherer de la Universidad Bowling Green, Anjan Shukla de la Universidad de Hawaii, Leo Simons de la Universidad de Cincinnati, Frederick Suppe de la Universidad de Illinois, Norman Swartz de la Universidad Simon Fraser, William J. Thomas de la Universidad de Carolina del Norte en Charlotte, William C. Wilcox de la Universidad de Missouri y Jason Xenakis de la Universidad Estatal de Louisiana.

Desearía expresar mi agradecimiento a mi hija Margaret Copi y a la Srita. Karen Lee por su ayuda en la lectura de las pruebas.

Ante todo, agradezco profundamente a mi esposa su aliento y ayuda en la preparación de esta nueva edición.

I. M. C.

Indice de Materias

1

Introducción: La Lógica y el Lenguaje

1.1. ¿Qué es la Lógica?

Es fácil hallar respuestas a la pregunta "¿Qué es la Lógica?" Según Charles Peirce, "Se han dado casi un centenar de definiciones de ella".[1] Pero Peirce continúa diciendo: "Sin embargo, se concederá generalmente que su problema central es la clasificación de los argumentos, de modo que todos los que sean malos se pongan de un lado y los que sean buenos del otro . . ."

El estudio de la Lógica, entonces, es el estudio de los métodos y principios usados al distinguir entre los argumentos correctos (buenos) y los argumentos incorrectos (malos). Con esta definición no se intenta implicar, desde luego, que uno puede hacer la distinción sólo si ha estudiado lógica. Pero el estudio de ésta *ayudará* a distinguir entre los argumentos correctos y los incorrectos, y lo hará de varias maneras. Ante todo, en el estudio propio de la lógica, ésta se aborda como un arte y como una ciencia y el estudiante hará ejercicios en todas las partes de la teoría estudiada. Aquí, como en cualquier parte, la práctica ayudará a alcanzar la perfección. En segundo lugar, el estudio de la lógica, especialmente la lógica simbólica, como el estudio de cualquier ciencia exacta incrementará la capacidad de razonamiento. Y por último, el estudio de la lógica dará al estudiante ciertas técnicas para probar la validez de todos los argumentos, incluyendo los suyos. Este conocimiento tiene valor porque cuando los errores son de fácil detección es menos probable que se cometan.

La lógica se ha definido con frecuencia como la ciencia del razonamiento. Esta definición, aunque da una clave a la naturaleza

[1] "Logic" en el *Dictionary of Philosophy and Psychology*, editado por James Mark Baldwin, New York, The Macmillan Company, 1925.

de la lógica, no es muy exacta. El razonamiento es la clase especial de pensamiento llamada inferencia, en la que se sacan conclusiones partiendo de premisas. Como pensamiento, sin embargo, no es campo exclusivo de la lógica, sino parte también de la materia de estudio del psicólogo. Los psicólogos que examinan el proceso del razonamiento lo encuentran en extremo complejo y altamente emocional, consistente en torpes procedimientos de prueba y error iluminados por súbitas —y a veces en apariencia inconsecuentes— visiones internas. Todos son de importancia para la psicología. Pero el lógico no se interesa en el proceso real del razonamiento. A él le importa la corrección del proceso completado. Su pregunta siempre es: *¿se sigue* la conclusión alcanzada de las premisas usadas o supuestas? Si las premisas son un fundamento adecuado para aceptar la conclusión, si afirmar que las premisas son verdaderas garantiza el afirmar la verdad de la conclusión, entonces el razonamiento es correcto. De otra manera es incorrecto. Los métodos y técnicas del lógico se han desarrollado primordialmente con el objeto de aclarar la distinción. El lógico se interesa en todo razonamiento, sin atender al contenido del mismo, sino sólo desde este punto de vista especial.

1.2. La Naturaleza del Argumento

La inferencia es una actividad en la que se afirma una proposición sobre la base de otra u otras proposiciones aceptadas como el punto de partida del proceso. Al lógico no le concierne el *proceso* de inferencia, sino las proposiciones iniciales y finales de ese proceso y las relaciones entre ellas.

Las proposiciones son o verdaderas o falsas, y en esto difieren de las preguntas, órdenes y exclamaciones. Los gramáticos clasifican las formulaciones lingüísticas de las proposiciones, preguntas, órdenes y exclamaciones, en oraciones declarativas, interrogativas, imperativas y exclamatorias, respectivamente. Estas nociones son familiares. Es costumbre distinguir entre las oraciones declarativas y las proposiciones que se afirman al pronunciar aquéllas. La distinción se hace resaltar observando que una oración declarativa es siempre parte de un lenguaje, lengua en que se dice o se escribe, mientras que las proposiciones no son privativas de ninguna de las lenguas en que se expresen. Otra diferencia es que la misma oración articulada en diferentes contextos puede afirmar diferentes proposiciones. (Por ejemplo, la oración "Tengo hambre", puede ser proferida por personas diferentes haciendo aserciones diferentes.) La misma clase de distinción puede establecerse entre las oraciones y los *enunciados*. Puede hacerse el mismo enunciado utilizando palabras diferentes, y la misma oración puede ser dicha en contextos diferentes para hacer enunciados diferentes. Los términos "enunciado" y "proposición" no son sinónimos exactos, pero en los escritos de los lógicos se usan más o menos en el mismo sentido. En este libro se usarán los dos términos. En los capítulos siguientes usaremos también el término "enunciado" (especialmente en los Caps. 2 y 3) y el término "proposición" (especialmente en los Caps. 4 y 5) refiriéndonos a las oraciones en las que se expresan los enunciados (y las proposiciones). En cada caso, el significado quedará claro por el contexto.

A cada inferencia posible corresponde *un argumento*, y de estos argumentos trata la lógica primordialmente. Un argumento puede definirse como un grupo cualquiera de proposiciones o enunciados de los cuales se afirma que hay uno que se sigue de los demás, considerando éstos como fundamento de la verdad de aquél. La palabra argumento también tiene otros significados en su uso cotidiano, pero en la lógica tiene el sentido técnico explicado. En los capítulos que siguen usaremos también la palabra argumento en un sentido derivado para referirnos a una oración cualquiera o colección de oraciones en que está formulado o expresado un argumento. Cuando así lo hagamos, presupondremos que la claridad del contexto permite asegurar que al pronunciar esas oraciones se hacen enunciados únicos o se afirman proposiciones únicas.

Todo argumento tiene una estructura, en cuyo análisis usualmente se emplean los términos "premisa" y "conclusión". La *conclusión* de un argumento es la proposición afirmada basándose en las otras proposiciones del argumento y estas otras proposiciones que se afirman como fundamento o razones para la aceptación de la conclusión son las *premisas* de ese argumento.

Notemos que "premisa" y "conclusión" son términos relativos, en el sentido de que la misma proposición puede ser premisa en un argumento y conclusión en otro. Así, *Todos los hombres son mortales*, es premisa en el argumento

Todos los hombres son mortales.
Sócrates es un hombre.
Por lo tanto, Sócrates es mortal.

y conclusión en el argumento

Todos los animales son mortales.
Todos los hombres son animales.
Luego, todos los hombres son mortales.

Toda proposición puede ser premisa o conclusión, dependiendo del contexto. Es una premisa cuando se presenta en un argumento en el que se le supone para demostrar alguna otra proposición, y es una conclusión cuando se presenta en un argumento que se pretende la demuestra basándose en las otras proposiciones que se suponen.

Es costumbre distinguir entre argumentos *deductivos* e *inductivos*. En todos los argumentos se pretende que las premisas proporcionan algún fundamento para la verdad de sus conclusiones, pero sólo en un argumento *deductivo* se pretende que sus premisas proveen un fundamento *absolutamente concluyente*. Los términos técnicos "válido" e "inválido" se usan en lugar de "correcto" e "incorrecto" al caracterizar los argumentos deductivos. Un argumento deductivo es *válido* cuando sus premisas y conclusión están relacionadas de modo tal que es absolutamente imposible que las premisas sean verdaderas, a menos que la conclusión lo sea también. La tarea de la lógica deductiva es la de aclarar la naturaleza de la relación que existe entre premisas y conclusión en un argumento válido, y proporcionar las técnicas de discriminación entre los válidos y los inválidos.

En los argumentos inductivos sólo se pretende que sus premisas proporcionan *algún* fundamento para sus conclusiones. Ni el término "válido" ni su opuesto "inválido" se aplican con propiedad a los argumentos inductivos. Los argumentos inductivos difieren entre sí en el grado de verosimilitud o probabilidad que sus premisas confieren a sus conclusiones, y se les estudia en la lógica inductiva. Pero en este libro nos ocuparemos solamente de los argumentos deductivos y usaremos la palabra "argumento" en referencia exclusiva a los argumentos deductivos.

1.3. Verdad y Validez

La verdad y falsedad caracterizan las proposiciones o los enunciados, y puede decirse, en sentido derivado, que caracterizan las oraciones declarativas en que se les formula. Pero los argumentos no se caracterizan propiamente por cuanto que son verdaderos o falsos. Por otro lado, la validez y la invalidez caracterizan los argumentos más bien que las proposiciones o los enunciados.[2] Hay una conexión entre la validez o invalidez de un argumento y la verdad

[2] Algunos lógicos usan el término "válido" para caracterizar enunciados que son *lógicamente verdaderos*, como se explicará en la Sec. 9.6 del Cap. 9. Sin embargo, por ahora aplicamos los términos "válido" e "inválido" exclusivamente a los argumentos.

o falsedad de sus premisas y conclusión, pero esta conexión no es de ningún modo una conexión simple.

Algunos argumentos válidos solamente contienen proposiciones verdaderas, como, por ejemplo,

Todos los murciélagos son mamíferos.
Todos los mamíferos tienen pulmones.
Luego, todos los murciélagos tienen pulmones.

Pero un argumento puede contener proposiciones falsas exclusivamente y ser válido a pesar de todo, como, por ejemplo,

Todas las truchas son mamíferos.
Todos los mamíferos tienen alas.
Luego, todas las truchas tienen alas.

Este argumento es válido porque *si* sus premisas fuesen verdaderas su conclusión tendría que ser verdadera también, aunque de hecho son falsas. Estos dos ejemplos muestran que, aunque algunos argumentos válidos tienen conclusiones verdaderas, no todos las tienen verdaderas. La validez de un argumento no garantiza la verdad de su conclusión.

Cuando consideramos el argumento

Si soy presidente entonces soy famoso.
Yo no soy presidente.
Por tanto, yo no soy famoso.

Podemos ver que aunque tanto las premisas como la conclusión son verdaderas, es un argumento inválido. Su invalidez se hace obvia al compararlo con otro argumento de la misma forma:

Si Rockefeller es presidente, entonces es famoso.
Rockefeller no es presidente.
Luego, Rockefeller no es famoso.

Este argumento es claramente inválido, puesto que sus premisas son verdaderas pero su conclusión es falsa. Los dos últimos ejemplos muestran que aun cuando algunos argumentos inválidos tienen conclusiones falsas no todos las tienen falsas. La falsedad de su conclusión no garantiza la invalidez de un argumento. Pero la falsedad de su conclusión sí garantiza que *o* el argumento es inválido *o* por lo menos una de sus premisas es falsa.

Hay dos condiciones que debe satisfacer un argumento para establecer la verdad de su conclusión. Debe ser válido y todas sus premisas deben ser verdaderas. Al lógico sólo atañe una de estas condiciones. Determinar la verdad o falsedad de las premisas es tarea de la investigación científica en general, pues las premisas pueden tratar de cualquier asunto. Pero determinar la validez o invalidez de los argumentos es el campo especial de la lógica deductiva. Al lógico le interesa la cuestión de la validez aun para argumentos cuyas premisas puedan ser falsas.

Podría cuestionarse la legitimidad de ese interés. Podría sugerirse que se confinara nuestra atención sólo o los argumentos de premisas verdaderas. Pero es frecuentemente necesario depender de la validez de argumentos cuyas premisas son de verdad desconocida. Los científicos modernos investigan sus teorías deduciendo conclusiones de las mismas que predicen el comportamiento de fenómenos observables en el laboratorio o el observatorio. La conclusión se pone a prueba entonces directamente por observación y, si es verdadera, esto tiende a confirmar la teoría de donde se dedujo, pero si es falsa queda refutada la teoría. En uno y en otro caso el científico tiene un interés vital en la validez del argumento por el que la conclusión puesta a prueba se deduce de la teoría investigada; porque si el argumento es inválido, su procedimiento es inútil. Lo que precede es una descripción sobresimplificada del método científico, pero sirve para mostrar que las cuestiones de validez son importantes aun en argumentos de premisas falsas.

1.4. Lógica Simbólica

Se ha explicado que a la lógica le conciernen los argumentos y que éstos contienen proposiciones o enunciados como sus premisas y conclusiones. Estas últimas no son entidades lingüísticas, como las oraciones declarativas, sino más bien son lo que las oraciones declarativas típicamente afirman al ser articuladas. Sin embargo, la comunicación de proposiciones y argumentos requiere el uso del lenguaje, y esto complica nuestro problema. Los argumentos formulados en inglés o cualquier otro lenguaje natural son de difícil evaluación debido a la vaga y equívoca naturaleza de las palabras en que se expresan, la ambigüedad de su construcción, sus expresiones idiomáticas, que pueden interpretarse mal, y su estilo metafórico agradable por un lado, pero engañoso por otro. Sin embargo la resolución de estas dificultades no es el problema central para el lógico, porque aun ya resueltas queda todavía el problema de decidir la validez o la invalidez del argumento.

Para evitar las dificultades periféricas ligadas al lenguaje ordinario, los trabajadores de las ciencias han desarrollado vocabularios técnicos especializados. El científico economiza el espacio y el tiempo requeridos para la escritura de sus reportes y teorías adoptando símbolos especiales para expresar ideas que de otra manera requerirían una larga sucesión de palabras familiares para su formulación. Esto tiene la ventaja adicional de reducir la cantidad de atención requerida, puesto que cuando una oración o ecuación se alarga demasiado se hace más difícil captar su significado. La introducción del símbolo exponente en las matemáticas permite expresar la ecuación

$$A \times A \times A \times A \times A \times A \times A \times A \times A \times A \times A \times A = B \times B \times B \times B \times B \times B \times B$$

más breve e inteligiblemente como

$$A^{12} = B^{7}$$

Una ventaja semejante se ha logrado usando las fórmulas gráficas en la química orgánica; y el lenguaje de cualquier ciencia avanzada se ha visto enriquecido por innovaciones simbólicas similares.

La lógica también ha desarrollado un sistema de notación técnica especial. Aristóteles hacía uso de ciertas abreviaciones para facilitar sus investigaciones, y la lógica simbólica moderna ha crecido con la introducción de otros muchos símbolos especiales. La diferencia entre la lógica nueva y la antigua es más una cuestión de grado que de naturaleza, pero la diferencia de grado es tremenda. La lógica simbólica moderna es incomparablemente más poderosa como herramienta de análisis y deducción a través del desarrollo de un lenguaje técnico propio. Los símbolos especiales de la lógica moderna nos permiten exhibir con mayor claridad las estructuras lógicas de argumentos cuya formulación puede quedar oscura en el lenguaje ordinario. Es una tarea más fácil la de dividir los argumentos en válidos e inválidos cuando se les expresa con el lenguaje simbólico especial, pues en éste no se dan los problemas periféricos de vaguedad, ambigüedad, peculiaridades idiomáticas, metáforas y anfibología.* La introducción y utilización de símbolos especiales sirve no sólo para facilitar la evaluación de los argumentos, sino también para aclarar la naturaleza de la inferencia deductiva.

Los símbolos especiales de la lógica se adaptan mucho mejor que el lenguaje ordinario a la obtención de las inferencias. Su superioridad en este respecto es comparable a aquella de que gozan los numerales arábigos sobre los más antiguos numerales romanos, tratándose de la computación. Es fácil multiplicar 148 por 47, pero muy difícil computar el producto de CXLVIII y XLVII. De manera semejante, la obtención de inferencias y la evaluación de los argumentos se ve grandemente facilitada con la adopción de una notación lógica especial. Citando a Alfred North Whitehead, quien hizo importantes contribuciones al avance de la lógica simbólica:

* Ambigüedad de proposiciones. Reservamos *ambigüedad*, para los términos. (N. del T.)

> ...con la ayuda del simbolismo podemos hacer, casi mecánicamente, transiciones en el razonamiento por el medio visual, las que, de otro modo, pondrían en juego las más elevadas facultades cerebrales.[3]

[3] *An Introduction to Mathematics* por A. N. Whitehead, Oxford, Eng., Oxford University Press, 1911.

2

Argumentos que Contienen Enunciados Compuestos

2.1. Enunciados Simples y Compuestos

Todos los enunciados pueden dividirse en dos clases: simples y compuestos. Un enunciado *simple* es uno que no contiene otro enunciado como parte componente, mientras que todo enunciado *compuesto* contiene otro enunciado como componente. Por ejemplo, "Las pruebas de armas nucleares en la atmósfera serán interrumpidas o este planeta se hará inhabitable" es un enunciado compuesto cuyos componentes son los dos enunciados simples "Las pruebas de armas nucleares en la atmósfera serán interrumpidas" y "este planeta se hará inhabitable". Las partes componentes de un enunciado compuesto pueden a su vez ser enunciados compuestos, desde luego. Ahora veremos algunas de las maneras diferentes de combinar los enunciados en enunciados compuestos.

El enunciado "Las rosas son rojas y las violetas son azules" es una *conjunción*, un enunciado compuesto que se forma insertando la palabra "y" entre los dos enunciados. Dos enunciados así combinados se llaman enunciados *conyuntos*. Sin embargo, la palabra "y" tiene otros usos, como en el enunciado "Cástor y Pólux eran gemelos" que no es compuesto, sino un enunciado simple que afirma cierta relación. Introducimos el punto "." como un símbolo especial para combinar enunciados conjuntivamente. Usándolo, la conjunción precedente se escribe "Las rosas son rojas. las violetas son azules". Si p y q son dos enunciados cualesquiera su conjunción se escribe $p \cdot q$.

Cada enunciado es o verdadero o falso, de modo que se puede hablar del *valor de verdad* de un enunciado, siendo el valor de verdad de un enunciado verdadero, *verdadero* y el valor de verdad de un enunciado falso, *falso.* Hay dos amplias categorías en las que pueden dividirse los enunciados compuestos de acuerdo con que exista o no una conexión necesaria entre el valor de verdad del enunciado compuesto y los valores de verdad de sus enunciados componentes. El valor de verdad del enunciado compuesto "Smith cree que el plomo es más pesado que el zinc" es completamente independiente del valor de verdad de su enunciado componente simple "el plomo es más pesado que el zinc", pues las personas tienen creencias correctas tanto como creencias equivocadas. Por otro lado, hay una conexión necesaria entre el valor de verdad de una conjunción y los valores de verdad de sus enunciados conyuntos. Una conjunción es verdadera si sus conyuntos son ambos verdaderos, pero es falsa en cualquier otra circunstancia. Cualquier enunciado compuesto cuyo valor de verdad está determinado completamente por los valores de verdad de sus enunciados componentes es un enunciado compuesto *función de verdad.** Los únicos enunciados compuestos que aquí consideraremos serán enunciados compuestos función de verdad. Por lo tanto, en el resto de este libro usaremos el término "enunciado simple" para referirnos a cualquier enunciado que no sea compuesto función de verdad.

Como las conjunciones son enunciados compuestos función de verdad nuestro símbolo es un conectivo de función de verdad (o veritativo funcional, como también se dice). Dados dos enunciados p y q hay solamente cuatro conjuntos de valores de verdad para ellos, y en cada caso el valor de verdad de su conjunción $p \cdot q$ está determinado de manera única. Los cuatro casos posibles pueden exhibirse como a continuación:

en el caso p es verdadero y q es verdadero, $p \cdot q$ es verdadero;
en el caso p es verdadero y q es falso, $p \cdot q$ es falso;
en el caso p es falso y q es verdadero, $p \cdot q$ es falso;
en el caso p es falso y q es falso, $p \cdot q$ es ralso.

Al representar los valores de verdad verdadero y falso con las letras "**T**" y "**F**", respectivamente, la manera en que el valor de verdad de una conjunción queda determinado por los valores de verdad de sus conyuntos se muestra de manera más concisa por medio de una *tabla de verdad*, como sigue:

p	q	$p \cdot q$
T	**T**	**T**
T	**F**	**F**
F	**T**	**F**
F	**F**	**F**

* **También se dice que esa composición es verificativo-funcional. (N. del T.)**

Ya que especifica el valor de verdad de $p \cdot q$ en cada caso posible, esta tabla de verdad se puede tomar como *definición* del símbolo *punto*. Otras palabras tales como "además", "también", "pero", "aún", "aunque", "sin embargo", etc., y hasta la coma y el punto y coma, se utilizan también para conjuntar dos enunciados en un compuesto y todos ellos pueden traducirse indiferentemente como el símbolo punto en lo que respecta a los valores de verdad.

El enunciado "No es el caso que el plomo sea más pesado que el oro" también es compuesto siendo la *negación* (o el *contradictorio*) de su enunciado compuesto único "el plomo es más pesado que el oro". Introducimos el símbolo "$\sim$", llamado una *tilde*, para simbolizar la negación. Hay frecuentemente otras formulaciones en lenguaje ordinario, de una negación. Así, si L simboliza el enunciado "el plomo es más pesado que el oro", los enunciados diferentes "no es el caso que el plomo sea más pesado que el oro", "es falso que el plomo sea más pesado que el oro", "no es verdad que el plomo sea más pesado que el oro", "el plomo no es más pesado que el oro", se simbolizan todos indiferentemente como $\sim L$. Más generalmente, si p es cualquier enunciado su negación se escribe $\sim p$. Como la negación de un enunciado verdadero es un enunciado falso y la negación de un enunciado falso es uno verdadero, podemos tomar la siguiente tabla de verdad como definición del símbolo tilde:

p	$\sim p$
T	F
F	T

Cuando dos enunciados se combinan disyuntivamente insertando la palabra "o" entre ellos, el enunciado compuesto que resulta es una *disyunción* (o *alternación*) y los dos enunciados así combinados se llaman *disyuntos* (o *alternativos*). La palabra "o" tiene dos sentidos diferentes, uno de los cuales es la clara intención en el enunciado "Se perderá derecho a recompensas en caso de enfermedad o desempleo". Aquí la intención es obviamente cancelar el derecho a premios no sólo para las personas enfermas y las personas desempleadas sino también para las personas que están enfermas *y* desempleadas. Este sentido de la palabra "o" se denomina *débil* o *inclusivo*. En donde la precisión sea esencial, como en los contratos y otros documentos legales, este sentido se hace explícito usando la frase "y/o".

Es otro el sentido de "o" que se intenta dar en el menú de un restaurante escribiendo "té o café", queriendo decir que por el precio estipulado el cliente puede tomar café o té pero *no ambos*. Este segundo sentido de "o" es llamado *fuerte* o *exclusivo*. En donde la precisión es esencial y se quiere dar el sentido exclusivo a la palabra "o" suele agregarse la frase "pero no ambos".

Una disyunción que usa el "o" inclusivo afirma que *por lo menos uno de los enunciados disyuntos es verdadero,* mientras que una disyunción que use el "o" exclusivo afirma que *por lo menos uno de los disyuntos es verdadero, pero no ambos son verdaderos.* El *significado común parcial,* que al menos un disyunto es verdadero, es el significado todo de una disyunción inclusiva y parte del significado de una disyunción exclusiva.

En latín la palabra "vel" expresa el sentido inclusivo de la palabra "o" y la palabra "aut" expresa el sentido exclusivo. Es costumbre usar la primera letra de "vel" para simbolizar "o" en su sentido inclusivo. Si p y q son dos enunciados cualesquiera, su disyunción débil o inclusiva se escribe $p \vee q$. El símbolo "v", denominado una *cuña* (o una *ve*), es un conectivo de función de verdad y se define por la tabla de verdad siguiente:

p	q	$p \vee q$
T	T	T
T	F	T
F	T	T
F	F	F

Un argumento que obviamente es válido y contiene una disyunción es el siguiente Silogismo Disyuntivo:

Las Naciones Unidas serán reforzadas o habrá una tercera guerra mundial.
Las Naciones Unidas no serán reforzadas.
Luego habrá una tercera guerra mundial.

Es evidente que un Silogismo Disyuntivo es válido en *cualquiera* de las interpretaciones de la palabra "o", esto es, sin atención a que su primera premisa afirme una disyunción inclusiva o exclusiva. Es usualmente difícil, y a veces imposible, descubrir cuál es el sentido de la palabra "o" que se intenta dar en una disyunción. Pero el argumento válido típico que tiene una disyunción como premisa es, como el Silogismo Disyuntivo, válido en cualquier interpretación de la palabra "o". Por lo tanto, efectuamos una simplificación al traducir cualquier ocurrencia de la palabra "o" en el símbolo lógico "v" —*sin atención al sentido que se quiera dar a "o"*—. Desde luego, en donde se establezca explícitamente que la disyunción es exclusiva, usando la frase adicional "pero no ambos", por ejemplo, tenemos el aparato simbólico para simbolizar este sentido, como se explicará más adelante.

El uso de los paréntesis, corchetes y llaves para la puntuación de las expresiones matemáticas es familiar. La expresión "$6 + 9 \div 3$", no determina un número único, aunque si la puntuación aclara cómo agrupar los números que la constituyen, denota 5 o 9. La puntuación es necesaria también para resolver la ambigüedad en el lenguaje de la lógica simbólica, porque los enunciados compuestos son susceptibles de combinaciones para formar enunciados más complicados. Hay ambigüedad en $p \cdot q \vee r$, que podría ser o la conjunción de p con $q \vee r$, o por otro lado, la disyunción de $p \cdot q$ con r. Estos dos sentidos diferentes los dan sin ambigüedad las puntuaciones diferentes: $p \cdot (q \vee r)$ y $(p \cdot q) \vee r$. En el caso en que p y q sean falsos ambos y r verdadero, la primera expresión puntuada es falsa (pues su primer enunciado conjunto es falso), pero la segunda expresión puntuada es verdadera (pues su segundo enunciado disyunto es verdadero). Aquí, la diferencia de puntuación hace toda la diferencia entre verdad y falsedad. En la lógica simbólica, como en las matemáticas, usamos paréntesis, corchetes y llaves para la puntuación. Sin embargo, para reducir el número de signos de puntuación requeridos estableceremos el convenio simbólico de que en cualquier expresión la tilde se aplicará a la componente más pequeña permitida por la puntuación. De este modo, la ambigüedad de $\sim p \vee q$, que podría significar o $(\sim p) \vee q$ o $\sim(p \vee q)$, queda resuelta por nuestro convenio para significar la primera de éstas, pues la tilde puede (y en consecuencia por nuestro convenio *lo hace*) aplicarse a la primera componente p y no a la expresión más larga $p \vee q$.

La palabra "either" tiene varios usos en inglés.* Tiene fuerza conjuntiva en "The Disjunctive Sillogism is valid on either interpretation of the word " 'or' ". Con frecuencia sólo sirve para introducir el primer enunciado disyunto de una disyunción, como en "Either the United Nations will be strengthened or there will be a third world war". Tal vez la función más útil de la palabra "either" sea la de puntuar algunos enunciados compuestos. Así, en la oración

> More stringent anti-pollution measures will be enacted and the laws will be strictly enforced or the quality of life will be degraded still further.

puede levantarse la ambigüedad en una dirección colocando la palabra "either" en su comienzo, y en la otra dirección insertando la

* Y, además, no tiene equivalente en español. La primera oración se traduce "el Silogismo Disyuntivo es válido en la una y en la otra de las interpretaciones de la letra 'o' ". La segunda oración entre comillas, "o Se refuerzan las N.U. o habrá una tercera guerra mundial", y la tercera oración se traduce "se decretarán medidas más severas contra la contaminación y las leyes serán ejecutadas estrictamente o la calidad de la vida será aún más rebajada". En español, eliminaríamos también la ambigüedad poniendo la letra "o" al comienzo de la oración o después de la letra "y": "o se decretan medidas más severas contra la contaminación y se ejecutan las leyes estrictamente, o la calidad ..." es un sentido, y el otro sentido lo da "se decretan medidas más severas contra la contaminación y/o se ejecutan las leyes estrictamente, o la calidad ..." (N. del T.)

palabra "either" inmediatamente después de "and". En nuestro lenguaje simbólico esta puntuación se efectúa por medio de paréntesis. La fórmula ambigua $p \cdot q \vee r$ discutida en el párrafo precedente corresponde a la oración ambigua que consideramos en éste. Las dos puntuaciones diferentes de la fórmula corresponden a las dos puntuaciones diferentes de la oración, efectuadas con las dos diferentes inserciones de la palabra "either".

No todas las conjunciones se formulan explícitamente colocando la palabra "y" entre oraciones completas, como en "Carlitos es limpio y Carlitos es encantador". De hecho, ésta se expresaría más naturalmente como "Carlitos es limpio y encantador", y "Juan y Carolina subieron a la colina" es la manera más natural de expresar la conjunción "Juan subió a la colina y Carolina subió a la colina". Lo mismo con las disyunciones: "o Alicia o Beatriz serán elegidas" expresa más brevemente la proposición que alternativamente se formula como "Alicia será elegida o Beatriz será elegida"; y "Carlota será secretaria o tesorera" expresa de manera un tanto más breve la misma proposición que "o Carlota será secretaria o Carlota será tesorera".

La negación de una disyunción se expresa a menudo usando la frase "ni-ni". Así, la disyunción "Alicia o Beatriz serán elegidas" queda negada por el enunciado "ni Alicia ni Beatriz serán elegidas". La disyunción se simbolizaría como $A \vee B$, y su negación como $\sim(A \vee B)$ o como $(\sim A) \cdot (\sim B)$. (La equivalencia lógica de estas dos fórmulas se discutirá en la Sec. 2.4.) Negar que al menos uno de los enunciados es verdadero es asegurar que ambos enunciados son falsos.

La palabra "ambos" tiene varias funciones. Una de ellas es sólo cuestión de énfasis. Decir "Ambos Juan y Carolina subieron a la colina" es sólo para recalcar que los dos hicieron lo que se dice que hicieron al decir "Juan y Carolina subieron a la colina". Una función más útil de la palabra "ambos" es de puntuación, como la de la palabra inglesa "either", recién explicada. "Ambos . . . y – · – no son – – –" se usa para expresar lo mismo que "Ni . . . ni – · – es – – –". En oraciones tales el *orden* que guardan las palabras "ambos" y "no" es de mucha significación. Hay una gran diferencia entre

> **Alicia y Beatriz no serán ambas elegidas.**

y

> **Alicia y Beatriz ambas no serán elegidas.**

La primera se simboliza como $\sim(A \cdot B)$, la última como $(\sim A) \cdot (\sim B)$.

Finalmente, hay que observar que la frase "a menos que" puede también usarse en la expresión de la disyunción de dos enunciados.

Así, "Nuestros recursos pronto se agotarán, a menos que se procesen más materiales de desecho" puede expresarse también como "O se procesan más materiales de desecho o se agotarán pronto nuestros recursos" y se simboliza como $M \vee E$.

Como una disyunción exclusiva asegura que al menos uno de los disyuntos es verdadero pero no ambos, podemos simbolizar la disyunción exclusiva de dos enunciados p y q cualesquiera simplemente como $(p \vee q) \cdot \sim(p \cdot q)$. Así, podemos simbolizar las conjunciones, las negaciones y las disyunciones inclusivas y exclusivas. Todo enunciado compuesto construido a partir de enunciados simples por aplicación repetida de conectivos de función de verdad, tendrá valores de verdad completamente determinados por los valores de verdad de esos enunciados simples. Por ejemplo, si A y B son enunciados verdaderos y X y Y son falsos, el valor de verdad del enunciado compuesto $\sim[(\sim A \vee X) \vee \sim(B \cdot Y)]$ puede encontrarse de la manera siguiente. Como A es verdadero, $\sim A$ es falso, y como X es falso, también la disyunción $(\sim A \vee X)$ es falsa. Dado que Y es falso, la conjunción $(B \cdot Y)$ es falsa y su negación $\sim(B \cdot Y)$ es verdadera. De este modo, la disyunción $(\sim A \vee X) \vee \sim(B \cdot Y)$ es verdadera, y su negación, que es el enunciado original, es falsa. Este procedimiento paso a paso, iniciado en las componentes (más) internas nos permite, siempre, determinar el valor de verdad de un enunciado compuesto función de verdad partiendo de los valores de verdad de sus enunciados simples componentes.

EJERCICIOS 1

I. **Si A y B son enunciados verdaderos y X y Y son falsos, ¿cuáles de los siguientes enunciados compuestos son verdaderos?**

*1. $\sim(A \vee X)$	11. $A \vee [X \cdot (B \vee Y)]$
2. $\sim A \vee \sim X$	12. $X \vee [A \cdot (Y \vee B)]$
3. $\sim B \cdot \sim Y$	13. $\sim\{\sim[\sim(A \cdot \sim X) \cdot \sim A] \cdot \sim X\}$
4. $\sim(B \cdot Y)$	14. $\sim\{\sim[\sim(A \cdot \sim B) \cdot \sim A] \cdot \sim A\}$
*5. $A \vee (X \cdot Y)$	*15. $[(A \cdot X) \vee \sim B] \cdot \sim[(A \cdot X) \vee \sim B]$
6. $(A \vee X) \cdot Y$	16. $[(X \cdot A) \vee \sim Y] \vee \sim[(X \cdot A) \vee \sim Y]$
7. $(A \vee B) \cdot (X \vee Y)$	17. $[A \cdot (X \vee Y)] \vee \sim[(A \cdot X) \vee (A \cdot Y)]$
8. $(A \cdot B) \vee (X \cdot Y)$	18. $[X \vee (A \cdot Y)] \vee \sim[(X \vee A) \cdot (X \vee Y)]$
9. $(A \cdot X) \vee (B \cdot Y)$	19. $[X \cdot (A \vee B)] \vee \sim[(X \vee A) \cdot (X \vee B)]$
*10. $A \cdot [X \vee (B \cdot Y)]$	20. $[X \vee (A \cdot Y)] \vee \sim[(X \vee A) \vee (X \vee Y)]$

[1] Las soluciones de ejercicios marcados se encuentran al final del libro.

II. Usando las letras *A, B, C* y *D* para abreviar los enunciados simples: "Atlanta gana el campeonato de su división", "Baltimore gana el campeonato de su división", "Chicago gana el Supertazón" y "Dallas gana el Supertazón", simbolizar los siguientes:

*1. O Atlanta gana el campeonato de su división y Baltimore gana el campeonato de su división o Chicago gana el Supertazón.
2. Atlanta gana el campeonato de su división y o Baltimore gana el campeonato de su división o Dallas no gana el Supertazón.
3. Atlanta y Baltimore no ganarán ambos los campeonatos de su división, pero Chicago y Dallas ambos no ganarán el Supertazón.
4. O Atlanta o Baltimore ganará el campeonato de su división, pero ni Chicago ni Dallas ganarán el Supertazón.
*5. O Chicago o Dallas ganará el Supertazón, pero no ganarán ambos el Supertazón.
6. Chicago ganará el Supertazón, a menos que Atlanta gane el campeonato de su división.
7. No es el caso que ni Atlanta ni Baltimore ganen el campeonato de su división.
8. O Chicago o Dallas ganará el Supertazón, a menos que ambos Atlanta y Baltimore ganen los campeonatos de su división.
9. O Chicago o Dallas ganará el Supertazón, a menos que ambos Atlanta y Baltimore ganen los campeonatos de su división.
10. O Chicago gana el Supertazón y Dallas no gana el Supertazón o ambos Atlanta y Baltimore ganan los campeonatos de su división.

III. Usando mayúsculas para abreviar los enunciados simples, simbolizar los siguientes enunciados:

*1. Es blanda su boca más que la manteca, pero lleva la guerra en su corazón. (Salmo 55:21)
2. Ni de oriente ni de occidente ni del desierto vendrá la salvación. (Salmo 75:6)
3. Los días del hombre son como la hierba; como flor del campo, así florece. (Salmo 103:15)
4. El vino es petulante y los licores, alborotadores. (Proverbios 20:1)
*5. Dios hizo recto al hombre, mas ellos se buscaron muchas maquinaciones. (Eclesiastés 7:29)
6. *No* es de los ágiles el correr ni de los valientes el combate... (Eclesiastés 9:11)
7. Que es fuerte el amor como la muerte y son como la tumba duros los celos. (Cantares de Salomón 8:6)
8. No romperá la caña cascada, ni apagará la mecha que se extingue. (Isaías 42:3)
9. Saúl y Jonatán amados y queridos en vida... (2 Samuel 1:23)
10. Ni se habían debilitado sus ojos, ni se había mustiado su vigor. (Deuteronomio 34:7)
11. La voz es la de Jacob, pero las manos son las de Esaú. (Génesis 27:22)
12. No vuelve más a su casa y no lo reconoce ya su lugar. (Job 7:10)

2.2. Enunciados Condicionales

El enunciado compuesto "Si el tren se retrasa entonces perderemos nuestro transbordo" es un *condicional* (o un *hipotético*, una *implicación* o un *enunciado implicativo*). El enunciado componente situado entre el "si" y el "entonces" es llamado el *antecedente* (o el *implicante* o *prótasis*), y el componente que sigue al "entonces" es el *consecuente* (o el *implicado* o *apódosis*). Un condicional no afirma que su antecedente sea verdadero o que su consecuente lo sea; sólo afirman que *si* su antecedente es verdadero, entonces su consecuente es también verdadero, o sea, que su antecedente *implica* su consecuente. La clave del significado de un condicional es la relación de *implicación* que se asegura que existe entre su antecedente y su consecuente, en ese orden.

Si examinamos un cierto número de condicionales diferentes veremos que pueden afirmar diferentes implicaciones. En el condicional "Si a todos los gatos les gusta el hígado y Dina es un gato, entonces a Dina le gusta el hígado", el consecuente se sigue *lógicamente* del antecedente. Por otro lado, en el condicional "Si la figura es un triángulo, entonces tiene tres lados", el consecuente se sigue del antecedente por la *definición* misma de "triángulo". Pero la verdad del condicional "Si el oro se sumerge en agua regia, entonces el oro se disuelve" no es cuestión de lógica ni de definición. Aquí la conexión afirmada es *causal* y debe descubrirse empíricamente. Este ejemplo muestra que hay diferentes clases de implicaciones que constituyen diferentes tipos de sentidos de la frase "si-entonces". Observadas estas diferencias, ahora buscamos un significado común identificable, algún significado parcial común a éstos que, como hemos aceptado, son diferentes tipos de condicionales.

Nuestra discusión de "si-entonces" correrá paralela a nuestra previa discusión de la palabra "o". Primero, señalamos dos sentidos diferentes de esa palabra. Segundo, notamos que había un significado parcial común: el hecho de que *al menos un disyunto sea verdadero*, se vio que estaba involucrado tanto en el "o" inclusivo como en el exclusivo. Tercero, introdujimos el símbolo especial "v" para representar este sentido parcial común (que era todo el significado de "o" en su sentido inclusivo). Cuarto, observamos que, dado que argumentos como el Silogismo Disyuntivo son válidos en cualquier interpretación de la palabra "o", simbolizar cualquier ocurrencia de la palabra "o" por el símbolo cuña preserva la validez de tales argumentos. Y como nos interesan los argumentos desde el punto de vista de la determinación de su validez, esta traducción de la palabra "o" en "v" que puede abstraer o ignorar parte de su significado en algunos casos, es enteramente adecuada para nuestros propósitos actuales.

Un significado parcial común de estas diferentes clases de enunciados condicionales surge cuando preguntamos cuáles serían circunstancias suficientes para establecer la falsedad de un condicional. ¿En qué circunstancias acordaríamos que el condicional "Si el oro se sumerge en agua regia entonces el oro se disuelve" es falso? Claramente, el enunciado es falso en el caso de que se sumerja el oro en esta solución y no se disuelva. Cualquier condicional de antecedente verdadero y consecuente falso debe ser falso. Luego, cualquier condicional *si p entonces q* se sabe que es falso en el caso de que la conjunción $p \cdot \sim q$ sea conocida verdadera, esto es, en caso de que el antecedente sea verdadero y su consecuente falso. Para que el condicional sea verdadero la condición indicada deberá ser falsa. En otras palabras, para que cualquier condicional *si p entonces q* sea verdadero, $\sim(p \cdot \sim q)$, la negación de la conjunción de su antecedente con la negación de su consecuente, también debe ser verdadera. Luego, podemos considerar esta última como *parte* del significado del condicional.

Introducimos un nuevo símbolo "$\supset$", llamado *herradura,* para representar el significado parcial común en todos los enunciados condicionales, definiendo "$p \supset q$" como una abreviación de "$\sim(p \cdot \sim q)$". La herradura es un conectivo de función de verdad, cuya significación exacta queda indicada por la tabla de verdad siguiente:

p	q	$\sim q$	$p \cdot \sim q$	$\sim(p \cdot \sim q)$	$p \supset q$
T	T	F	F	T	T
T	F	T	T	F	F
F	T	F	F	T	T
F	F	T	F	T	T

En ésta, la primera y segunda columnas representan todos los valores de verdad posibles para los enunciados componentes p y q, y las columnas tercera, cuarta y quinta representan etapas sucesivas al determinar el valor de verdad del enunciado compuesto $\sim(p \cdot \sim q)$ en cada caso. La sexta columna es idénticamente la misma que la quinta, puesto que las fórmulas que las encabezan por definición expresan la misma proposición. El símbolo de herradura no debe pensarse que representa *el* significado del "si-entonces", o *la* relación de implicación, sino más bien un factor parcial común de las diferentes clases de implicaciones significadas por la frase "si-entonces".

Podemos considerar esta herradura como símbolo de una clase especial, extremadamente débil, de implicación, y nos resulta conveniente hacerlo así, pues algunas maneras de leer "$p \supset q$" son "si p entonces q", "p implica q" o "p sólo si q". La implicación débil simbolizada "$\supset$" se llama *implicación material*, y su nombre especial indica que es una noción especial, que no debe confundirse con las otras clases de implicación más usuales. Algunos enunciados condicionales en el lenguaje ordinario afirman meramente implicaciones materiales como, por ejemplo, "Si Rusia es una democracia entonces yo soy Napoleón". Es claro que la implicación afirmada aquí no es lógica, ni definitoria, ni causal. No se pretende ninguna "conexión real" entre lo que afirma el antecedente y lo que se afirma en el consecuente. Esta clase de condicional se usa ordinariamente como un método enfático o humorístico de negar la verdad de su antecedente, pues típicamente contiene un enunciado notoria o ridículamente falso como consecuente. Cualquier afirmación tal respecto a los valores de verdad se simboliza adecuadamente usando el conectivo de función de verdad "$\supset$".

Aunque la mayor parte de los enunciados condicionales afirman más que una implicación meramente material entre el antecedente y el consecuente, ahora proponemos simbolizar cualquier ocurrencia de "si-entonces" mediante el conectivo de función de verdad "$\supset$". Debe admitirse que esta simbolización abstrae o ignora parte del significado de casi todos los enunciados condicionales. Pero la proposición puede justificarse sobre la base de que la validez de los argumentos válidos que involucran condicionales se preserva cuando los condicionales se consideran como implicaciones materiales solamente, como se establecerá en las siguientes secciones.

Los enunciados condicionales pueden expresarse en toda una variedad de formas. Un enunciado de la forma "si p entonces q" podría igualmente bien expresarse como "si p, q", "q si p", "que p implica que q", "que p trae consigo que q", "p sólo si q", "que p es una condición suficiente que q", o, como "que q es una condición necesaria que p", y cualquiera de estas formulaciones se simbolizará mediante $p \supset q$.

EJERCICIOS

I. Si A y B son enunciados verdaderos y X y Y son enunciados falsos, ¿cuáles de los siguientes enunciados compuestos son verdaderos?

*1. $X \supset (X \supset Y)$
2. $(X \supset X) \supset Y$
3. $(A \supset X) \supset Y$
4. $(X \supset A) \supset Y$
*5. $A \supset (B \supset Y)$
6. $A \supset (X \supset B)$
7. $(X \supset A) \supset (B \supset Y)$
8. $(A \supset X) \supset (Y \supset B)$

9. $(A \supset B) \supset (\sim A \supset \sim B)$
*10. $(X \supset Y) \supset (\sim X \supset \sim Y)$
11. $(X \supset A) \supset (\sim X \supset \sim A)$
12. $(X \supset \sim Y) \supset (\sim X \supset Y)$
13. $[(A \cdot X) \supset Y] \supset (A \supset Y)$
14. $[(A \cdot B) \supset X] \supset [A \supset (B \supset X)]$
*15. $[(X \cdot Y) \supset A] \supset [X \supset (Y \supset A)]$
16. $[(A \cdot X) \supset B] \supset [A \supset (B \supset X)]$
17. $[X \supset (A \supset Y)] \supset [(X \supset A) \supset Y]$
18. $[X \supset (X \supset Y)] \supset [(X \supset X) \supset X]$
19. $[(A \supset B) \supset A] \supset A$
20. $[(X \supset Y) \supset X] \supset X$

II. Representando con el símbolo *A* el enunciado "Amherst gana su primer juego", con *C* el enunciado "Colgate gana su primer juego" y con *D*, "Dartmouth gana su primer juego", simbolizar los siguientes enunciados compuestos:

*1. Ambos Amherst y Colgate ganan su primer juego sólo si Dartmouth no gana su primer juego.
2. Amherst gana su primer juego si o Colgate gana su primer juego o Dartmouth gana su primer juego.
3. Si Amherst gana su primer juego, entonces ambos Colgate y Dartmouth ganan su primer juego.
4. Si Amherst gana su primer juego, entonces o Colgate o Dartmouth gana su primer juego.
*5. Si Amherst no gana su primer juego, entonces no es el caso que o Colgate o Dartmouth gana su primer juego.
6. Si no es el caso que ambos Amherst y Colgate ganan su primer juego entonces ambos Colgate y Dartmouth ganan su primer juego.
7. Si Amherst gana su primer juego, entonces no es verdad que ambos Colgate y Dartmouth ganan su primer juego.
8. Si Amherst no gana su primer juego entonces ambos Colgate y Dartmouth no ganan su primer juego.
9. O Amherst gana su primer juego y Colgate no gana su primer juego o si Colgate gana su primer juego, entonces Dartmouth no gana su primer juego.
*10. Si Amherst gana su primer juego, entonces Colgate no gana su primer juego, pero si Colgate no gana su primer juego, entonces Dartmouth gana su primer juego.
11. Si Amherst gana su primer juego, entonces si Colgate no gana su primer juego, entonces Dartmouth gana su primer juego.
12. O Amherst y Colgate ganan su primer juego o no es el caso que si Colgate gana su primer juego, entonces Darmouth gana su primer juego.
13. Amherst gana su primer juego sólo si o Colgate o Dartmouth gana su primer juego.
14. Si Amherst gana su primer juego sólo si Colgate gana su primer juego, entonces Dartmouth no gana su primer juego.
15. Si Amherst y Colgate ambos no ganan su primer juego, entonces Amherst y Colgate no ganan ambos su primer juego.

2.3. Formas de Argumentos y Tablas de Verdad

En esta sección desarrollamos un método puramente mecánico para probar la validez de argumentos que contienen enunciados compuestos de función de verdad. Ese método está íntimamente relacionado con la técnica familiar de *refutación por analogía lógica* que se usó en el primer capítulo para demostrar la invalidez del argumento

Si yo soy presidente entonces soy famoso.
Yo no soy presidente.
Luego yo no soy famoso.

Este argumento se mostró que era inválido construyendo otro argumento de la misma forma:

Si Rockefeller es presidente entonces él es famoso.
Rockefeller no es presidente.
Luego Rockefeller no es famoso.

que obviamente es inválido, pues sus premisas son verdaderas, pero su conclusión falsa. Cualquier argumento se prueba que es inválido si es posible construir otro argumento de *exactamente la misma forma* con premisas verdaderas y una conclusión falsa. Esto refleja el hecho de que la validez y la invalidez son características puramente *formales* de los argumentos: dos argumentos cualesquiera que tienen la misma forma o son válidos ambos o ambos son inválidos, independientemente de las diferencias de su contenido.[2] La noción de dos argumentos que tienen *exactamente la misma forma* es una noción que merece mayor examen.

Es conveniente, al discutir las formas de los argumentos, usar letras minúsculas de la parte media del alfabeto, "*p*", "*q*", "*r*", "*s*", . . . como *variables sentenciales*, que se definen simplemente como letras por las cuales, o en lugar de las cuales, se pueden sustituir enunciados. Ahora definimos una *forma argumental* como cualquier arreglo de símbolos que contiene variables sentenciales, de modo que al sustituir enunciados por las variables sentenciales —siendo siempre el mismo enunciado el que reemplaza a la misma variable— el resultado es un argumento. Por precisión, establecemos el convenio de que en cualquier forma argumental, "*p*" será la primera variable sentencial que ocurre en el mismo, "*q*" será la segunda, "*r*" la tercera y así sucesivamente.

[2] Aquí suponemos que los enunciados simples involucrados no son ni lógicamente verdaderos (como "todos los triángulos equiláteros son triángulos"), ni lógicamente falsos (como "algunos triángulos son no triangulares"). Suponemos también que las únicas relaciones lógicas entre los enunciados simples involucrados son los que afirman o son consecuencia de las premisas. La finalidad de estas restricciones es limitar nuestras consideraciones en los Caps. 2 y 3 a argumentos de función de verdad solamente, y excluir otra clase de argumentos cuya validez tiene que ver con consideraciones lógicas más complejas que se introducirán en los Caps. 4 y 5.

Cualquier argumento que sea resultado de la sustitución de enunciados en lugar de variables sentenciales de una forma argumental, se dice que *tiene* esa forma o que es una *instancia de sustitución* de esa forma argumental. Si simbolizamos el enunciado simple "Las Naciones Unidas serán reforzadas" con U, y el enunciado simple "Habrá una tercera guerra mundial" con W, entonces el Silogismo Disyuntivo antes presentado puede simbolizarse como

(1)

$$U \vee W$$
$$\sim U$$
$$\therefore W$$

Tiene la forma

(2)

$$p \vee q$$
$$\sim p$$
$$\therefore q$$

de la cual resulta reemplazando las variables sentenciales p y q por los enunciados U y W, respectivamente. Pero esa no es la única forma de la cual es una instancia de sustitución. El mismo argumento se obtiene reemplazando las variables sentenciales p y q y r en la forma argumental

(3)

$$p$$
$$q$$
$$\therefore r$$

por los enunciados $U \vee W$, $\sim U$ y W, respectivamente. Definimos *la forma específica* de un argumento dado, como aquella forma argumental de la cual resulta el argumento reemplazando cada variable sentencial por un enunciado simple diferente. Así, la forma específica del argumento (1) es la forma argumental (2). Aunque la forma argumental (3) es *una* forma del argumento (1), no es *la forma específica* del mismo. La técnica de refutación por analogía lógica puede ahora describirse más precisamente. Si la forma específica de un argumento dado puede mostrarse que tiene una instancia de sustitución con premisas verdaderas y conclusión falsa, entonces el argumento dado es inválido.

Los términos "válido" e "inválido" pueden extenderse para aplicarse a formas argumentales tanto como a argumentos. Una forma argumental *inválida* es una que tiene cuando menos una instancia de sustitución con premisas verdaderas y una conclusión falsa. La técnica de refutación por analogía lógica presupone que todo argumento del cual la forma específica es una forma argumental inválida es un argumento inválido. Toda forma argumental que no sea inválida es *válida;* una forma argumental *válida* es una que no tiene instancia de sustitución con premisas verdaderas y conclusión falsa. Cualquier argumento dado puede probarse que es válido si se puede mostrar que la forma específica del argumento dado es una forma argumental válida.

Para determinar la validez o invalidez de una forma argumental debemos examinar todas las instancias de sustitución posibles de ella para ver si algunas tienen premisas verdaderas y conclusiones falsas. Los argumentos de los que aquí nos ocupamos solamente contienen enunciados simples y enunciados función de verdad compuestos con aquéllos, y sólo nos interesan los valores de verdad, de sus premisas y conclusiones. Podemos obtener todas las instancias de sustitución posibles cuyas premisas y conclusiones tienen diferentes valores de verdad, considerando todos los posibles arreglos de valores de verdad para los enunciados sustituyendo las diferentes variables sentenciales en la forma argumental que se prueba. Estas pueden disponerse de la manera más conveniente en una tabla de verdad, con una columna inicial o guía para cada variable sentencial que aparece en la forma argumental. Así, para probar la validez de la forma del Silogismo Disyuntivo

$$p \vee q$$
$$\sim p$$
$$\therefore q$$

construimos la siguiente tabla de verdad:

p	q	$p \vee q$	$\sim p$
T	**T**	**T**	**F**
T	**F**	**T**	**F**
F	**T**	**T**	**T**
F	**F**	**F**	**T**

Cada renglón de esta tabla representa una clase completa de instancias de sustitución. Las **T** y las **F** en las dos columnas iniciales representan los valores de verdad de enunciados que pueden sustituirse por las variables p y q en la forma argumental. Estos valores determinan los valores de verdad en las otras columnas, la tercera de las cuales está encabezada por la primera "premisa" de la forma argumental y la cuarta por la segunda "premisa". El encabezado de la segunda columna es la conclusión de la forma argumental. Un examen de esta tabla de verdad revela que cualesquiera que sean los enunciados sustituidos por las variables p y q, el argumento resultante no puede tener premisas verdaderas y una conclusión falsa, pues el tercer renglón representa el único caso posible en que ambas premisas son verdaderas y ahí la conclusión también es verdadera.

Como las tablas de verdad proporcionan un método puramente mecánico o *efectivo* de decisión de la validez o invalidez de cualquier argumento del tipo general aquí considerado, ahora podemos justificar nuestra propuesta de simbolizar todos los enunciados condicionales por medio del conectivo de función de verdad "$\supset$". La justificación para tratar todas las implicaciones como si fueran meramente implicaciones materiales es que los argumentos válidos que contienen enunciados condicionales siguen siendo válidos cuando estos condicionales se interpretan como afirmando implicaciones materiales solamente. Las tres más simples y más intuitivamente válidas formas de argumento que involucran enunciados condicionales son

Modus Ponens Si p entonces q
p
$\therefore q$

Modus Tollens Si p entonces q
$\sim q$
$\therefore \sim p$

y el Silogismo Hipotético Si p entonces q
Si q entonces r
$\therefore$ Si p entonces r.

El que sigan siendo válidos cuando sus condicionales se interpretan como aseveraciones de implicaciones materiales, es un hecho que fácilmente se establece por tablas de verdad. La validez de *Modus Ponens* se muestra con la misma tabla de verdad que define el símbolo herradura:

p	q	$p \supset q$
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

Aquí las dos premisas se representan por las columnas tercera y primera y la conclusión por la segunda. Sólo el primer renglón representa instancias de sustitución en las que ambas premisas son verdaderas, y en ese renglón la conclusión también es verdadera. La validez de *Modus Tollens* se muestra por medio de la siguiente tabla:

p	q	$p \supset q$	$\sim q$	$\sim p$
T	T	T	F	F
T	F	F	T	F
F	T	T	F	T
F	F	T	T	T

Aquí solamente el cuarto renglón representa instancias de sustitución en las que ambas premisas (las columnas tercera y cuarta) son verdaderas, y ahí la conclusión (quinta columna) también es verdadera. Como el Silogismo Hipotético contiene tres enunciados distintos para variables sentenciales distintas, su tabla de verdad debe tener tres columnas iniciales y requerirá ocho renglones para alistar todas las posibles instancias de sustitución:

p	q	r	$p \supset q$	$q \supset r$	$p \supset r$
T	**T**	**T**	**T**	**T**	**T**
T	**T**	**F**	**T**	**F**	**F**
T	**F**	**T**	**F**	**T**	**T**
T	**F**	**F**	**F**	**T**	**F**
F	**T**	**T**	**T**	**T**	**T**
F	**T**	**F**	**T**	**F**	**T**
F	**F**	**T**	**T**	**T**	**T**
F	**F**	**F**	**T**	**T**	**T**

Al construirla, las tres columnas iniciales representan todos los arreglos posibles de valores de verdad para los enunciados sustituidos en lugar de las variables sentenciales p, q y r, la cuarta columna se llena con referencia a la primera y la segunda, la quinta con referencia a la segunda y la tercera, y la sexta con referencia a la primera y la tercera. Las premisas son ambas verdaderas sólo en los renglones primero, quinto, séptimo y octavo, y en estos renglones la conclusión también es verdadera. Esto basta para mostrar que el Silogismo Hipotético es válido cuando sus condicionales se simbolizan mediante el símbolo herradura. Todas las dudas que queden respecto a la afirmación de que los argumentos válidos que contienen condicionales siguen siendo válidos cuando sus condicionales se interpreten como afirmando meramente implicaciones materiales puede aclararlas el lector al construir, simbolizar y probar sus propios ejemplos mediante tablas de verdad.

Para probar la validez de una forma argumental mediante una tabla de verdad, es necesaria una tabla con una columna inicial o guía separada para cada variable sentencial diferente y un renglón separado para cada posible asignación de valores de verdad a las variables sentenciales involucradas. Así pues, probar una forma argumental que contiene n variables sentenciales distintas requiere una tabla de verdad con 2^n renglones. Al construir tablas de verdad es conveniente fijar un patrón uniforme de inscripción de las **T** y las **F** en sus columnas iniciales o guía. En este libro nos apegaremos a la práctica de ir simplemente alternando las **T** y las **F** hacia abajo en la columna inicial extrema derecha, alternando pares de **T** con pares de **F** hacia abajo en la columna directamente a su izquierda, después alternando grupos de cuatro **T** con grupos de cuatro **F**, . . . , y al llegar a la columna extrema izquierda ponemos **T** en toda su mitad superior y **F** en toda su mitad inferior.

Hay dos formas de argumento inválidas que tienen un parecido superficial con las formas válidas *Modus Ponens* y *Modus Tollens*. Estas son:

$$\begin{array}{lcl} p \supset q & & p \supset q \\ q & \text{y} & \sim p \\ \therefore p & & \therefore \sim q \end{array}$$

y se conocen con el nombre de las Falacias de Afirmación del Consecuente y Negación del Antecedente, respectivamente. La invalidez de ambas puede mostrarse en una misma tabla de verdad:

p	q	$p \supset q$	$\sim p$	$\sim q$
T	T	T	F	F
T	F	F	F	T
F	T	T	T	F
F	F	T	T	T

Las dos premisas en la Falacia de Afirmación del Consecuente encabezan las columnas segunda y tercera, y son verdaderas en el primer y en el tercer renglón. Pero la conclusión, que encabeza la primera columna, es falsa en el tercer renglón, lo que muestra que la forma de argumentar tiene una instancia de sustitución con premisas verdaderas y conclusión falsa y, por lo tanto, es inválida. Las columnas tres y cuatro son las encabezadas por las premisas en la Falacia de Negación del Antecedente, que son verdaderas en los renglones tercero y cuarto. Su conclusión encabeza la columna cinco y es falsa en el tercer renglón, lo que muestra que la segunda forma argumental también es inválida.

Hay que recalcar que aunque una forma de argumento inválida tiene sólo argumentos válidos como instancias de sustitución, una forma de argumento inválida puede tener instancias de sustitución válidas tanto como inválidas. Así que para demostrar que un argumento dado es inválido hay que demostrar que *la forma específica* de ese argumento es inválida.

EJERCICIOS

I. Para cada uno de los argumentos siguientes indique cuál de las formas de argumento del Ejercicio II a continuación tiene a este argumento como instancia de sustitución, y también indique cuál es su forma específica, si alguna lo es:

*a. A
$\therefore A \vee B$

b. $C \cdot D$
$\therefore C$

c. $E \supset (F \cdot G)$
$\therefore \sim(F \cdot G) \supset \sim E$

d. H
I
$\therefore H \cdot I$

*e. $J \supset (K \cdot L)$
$J \vee (K \cdot L)$
$\therefore K \cdot L$

f. $M \supset (N \supset O)$
$O \supset \sim M$
$\therefore O \supset \sim N$

g. $(P \supset Q) \cdot (R \supset S)$
$\therefore P \supset Q$

h. $T \supset U$
$\therefore (T \supset U) \vee (V \cdot T)$

i. $W \supset X$
$\therefore X \supset (W \supset X)$

*j. $Y \vee (Z \cdot \sim Y)$
Y
$\therefore \sim(Z \cdot \sim Y)$

k. $(A \supset B) \cdot (C \supset D)$
$A \vee C$
$\therefore B \vee D$

l. $(E \supset F) \cdot (G \supset H)$
$\sim F \vee \sim G$
$\therefore \sim E \vee \sim H$

m. $I \supset J$
$\therefore (I \supset J) \supset (I \supset J)$

n. $K \supset (L \supset M)$
$K \supset L$
$\therefore K \supset M$

o. $N \supset (N \supset O)$
$N \supset N$
$\therefore N \supset O$

II. Utilice tablas de verdad para determinar la validez o la invalidez de cada una de las formas de argumento siguiente:

*1. $p \cdot q$
$\therefore p$

2. p
$\therefore p \cdot q$

3. $p \vee q$
$\therefore p$

4. p
$\therefore p \vee q$

*5. p
$\therefore p \supset q$

6. p
$\therefore q \supset p$

7. $p \supset q$
$\therefore \sim q \supset \sim p$

8. $p \supset q$
$\therefore \sim p \supset \sim q$

9. $p \supset (q \cdot r)$
$\therefore \sim(q \cdot r) \supset \sim p$

*10. $p \vee q$
p
$\therefore \sim q$

11. p
q
$\therefore p \cdot q$

12. $p \supset q$
$q \supset p$
$\therefore p \vee q$

13. $p \supset q$
$p \vee q$
$\therefore q$

14. $p \supset (q \supset r)$
$p \supset q$
$\therefore p \supset r$

*15. $(p \supset q) \cdot (p \supset r)$
p
$\therefore q \vee r$

16. $p \supset (q \vee r)$
$p \supset \sim q$
$\therefore p \vee r$

17. $(p \supset q) \cdot (r \supset s)$
$p \vee r$
$\therefore q \vee s$

18. $(p \supset q) \cdot (r \supset s)$
$\sim q \vee \sim s$
$\therefore \sim p \vee \sim r$

19. $(p \vee q) \supset (p \cdot q)$
$p \cdot q$
$\therefore p \vee q$

20. $p \vee (q \cdot \sim p)$
p
$\therefore \sim(q \cdot \sim p)$

21. $(p \vee q) \supset (p \cdot q)$
$\sim(p \vee q)$
$\therefore \sim(p \cdot q)$

III. Use tablas de verdad para determinar la validez o invalidez de cada uno de los siguientes argumentos:

*1. Si Alicia es elegida presidenta de grupo, entonces o Bety es elegida vicepresidenta o Carolina es elegida tesorera. Bety es elegida vicepresidenta. Por lo tanto, si Alicia es elegida presidenta del grupo, entonces Carolina no es elegida tesorera.

2. Si Alicia es elegida presidenta del grupo, entonces o Bety no es elegida vicepresidenta o Carolina es elegida tesorera. Carolina no es

elegida tesorera. Por lo tanto, si Bety no es elegida vicepresidenta, entonces Alicia no es elegida presidenta del grupo.

3. Si Alicia es elegida presidenta del grupo, entonces Bety es elegida vicepresidenta y Carolina es elegida tesorera. Bety no es elegida vicepresidenta. Por lo tanto, Alicia no es elegida presidenta del grupo.
4. Si Alicia es elegida presidenta del grupo, entonces si Bety es elegida vicepresidenta, entonces Carolina es elegida tesorera. Bety no es elegida vicepresidenta. Por lo tanto, o Alicia es elegida presidenta del grupo o Carolina es elegida tesorera.

*5. Si el catálogo de semillas es correcto, entonces si las semillas se siembran en abril, entonces las flores se abren en julio. Las flores no se abren en julio. Por lo tanto, si las semillas se siembran en abril, entonces el catálogo de semillas no es correcto.

6. Si el catálogo de semillas es correcto, entonces si las semillas se siembran en abril, entonces las flores se abren en julio. Las flores se abren en julio. Por lo tanto, si el catálogo de semillas es correcto, entonces las semillas se siembran en abril.
7. Si el catálogo de semillas es correcto, entonces si las semillas se siembran en abril, entonces las flores abren en julio. Las semillas se siembran en abril. Luego, si las flores no se abren en julio, entonces el catálogo de semillas no es correcto.
8. Si el catálogo de semillas es correcto, entonces si las semillas se siembran en abril, entonces las plantas florecen en julio. Las plantas no florecen en julio. Luego, si las semillas no se siembran en abril, entonces el catálogo de semillas no es correcto.
9. Si Eduardo gana el primer premio, entonces o Federico gana el segundo o Jorge queda decepcionado. O Eduardo gana el primer premio o Jorge queda decepcionado. Luego, Federico no gana el segundo premio.

*10. Si Eduardo gana el primer premio, entonces o Federico gana el segundo premio o Jorge queda decepcionado. Federico no gana el segundo premio. Por tanto, si Jorge queda decepcionado, entonces Federico no gana el primer premio.

11. Si Eduardo gana el primer premio, entonces Federico gana el segundo premio, y si Federico gana el segundo premio, entonces Jorge queda decepcionado. O Federico no gana el primer premio o Jorge queda decepcionado. Por tanto, Eduardo no gana el primer premio.
12. Si Eduardo gana el primer premio, entonces Federico gana el segundo premio, y si Federico gana el segundo premio, entonces Jorge queda decepcionado. O Eduardo gana el primer premio o Federico no gana el segundo premio. Por lo tanto, o Federico no gana el segundo premio o Jorge no queda decepcionado.
13. Si el tiempo está agradable y el cielo claro, entonces vamos a nadar y a pasear en bote. No es el caso que si el cielo está despejado entonces vamos a nadar. Por tanto, el tiempo no está agradable.
14. Si hace una temperatura agradable, y el cielo está despejado, entonces o vamos a nadar o a pasear en bote. No es verdad que si el cielo está despejado, entonces vamos a nadar. Por lo tanto, si no vamos a pasear en bote, entonces no hace una temperatura agradable.

*15. Si el tiempo está agradable y el cielo despejado, entonces o vamos a nadar o vamos a dar un paseo en bote. No es el caso que si no vamos a nadar entonces el cielo no está despejado. Por lo tanto, o el tiempo está agradable o vamos a pasear en bote.

2.4. Formas Sentenciales*

La introducción de variables sentenciales en la sección precedente nos permitió definir las formas argumentales en general y la forma específica de un argumento dado. Ahora definimos una *forma sentencial* como cualquier sucesión de símbolos conteniendo variables sentenciales, de modo que al sustituir enunciados por las variables sentenciales —reemplazando la misma variable sentencial por el mismo enunciado en toda la secuencia— el resultado es un enunciado. Otra vez, para precisar, convendremos en que en cualquier forma sentencial "p" será la primera variable sentencial que aparece, "q" será la segunda en ocurrir, "r" la tercera y así sucesivamente. Todo enunciado que resulta de la sustitución de las variables sentenciales por enunciados en una forma sentencial, se dirá que *tiene* esa forma o que es una *instancia de sustitución* de ella. Así como distinguimos la forma específica de un argumento dado, así también distinguiremos *la forma específica* de un enunciado dado como la forma sentencial de la que resulta el enunciado poniendo en el lugar de cada variable sentencial un enunciado simple diferente. Así, por ejemplo, si A, B y C son enunciados simples diferentes, el enunciado compuesto $A \supset (B \vee C)$ es una instancia de sustitución de la forma sentencial $p \supset q$ y también de la forma sentencial $p \supset (q \vee r)$, pero sólo esta última es la forma específica del enunciado dado.

Aunque los enunciados "Balboa descubrió el Océano Pacífico" (B) y "Balboa descubrió el Océano Pacífico o no lo descubrió" ($B \vee \sim B$) ambos son verdaderos, descubrimos su verdad de maneras enteramente diferentes. La verdad de B es cuestión histórica y se aprende por medio de la investigación empírica. Aún más, podrían haber ocurrido cosas que hicieran a B falso; nada *necesario* hay respecto a la verdad de B. Pero la verdad del enunciado $B \vee \sim B$ *puede* saberse independientemente de toda investigación empírica y ningún suceso puede hacerlo falso porque es una verdad necesaria. El enunciado $B \vee \sim B$ es una verdad formal, una instancia de sustitución de una forma sentencial cuyas instancias de sustitución *todas* son verdaderas. Una forma sentencial que sólo tiene instancias de sustitución verdaderas se dice *tautológica*, o que es una *tautología*.

* O formas de enunciados. N. del T.

La forma específica de $B \vee \sim B$ es $p \vee \sim p$ y se prueba que es tautológica mediante la siguiente tabla de verdad:

p	$\sim p$	$p \vee \sim p$
T	**F**	**T**
F	**T**	**T**

En la columna que encabeza la forma sentencial de que se trata sólo hay valores **T**, luego todas sus instancias de sustitución son verdaderas. Cualquier enunciado que es una instancia de sustitución de una forma sentencial tautológica es formalmente verdadero, y también se le llama tautológico, o una tautología.

Similarmente, aunque los enunciados "Cortés descubrió el Pacífico" (C) y "Cortés descubrió el Pacífico y Cortés no descubrió el Pacífico" ($C \cdot \sim C$) ambos son falsos, descubrimos su falsedad de dos maneras enteramente diferentes. El primero simplemente *ocurre* que es falso y eso se descubre empíricamente; mientras que el segundo es necesariamente falso y eso puede saberse independientemente de toda investigación empírica. El enunciado $C \cdot \sim C$ es formalmente falso, es una instancia de sustitución de una forma sentencial cuyas instancias de sustitución todas son falsas. Un enunciado se dice que contradice, o que es una contradicción de otro enunciado, cuando es lógicamente imposible que ambos sean verdaderos. En este sentido la *contradicción* es una relación entre enunciados. Pero hay otro sentido, relacionado del mismo término. Cuando es lógicamente imposible que un enunciado particular sea verdadero, ese enunciado mismo es llamado autocontradictorio o una autocontradicción. Más simplemente, se dice que tales enunciados son contradictorios o contradicciones, y ésta es la terminología que aquí usaremos. Una forma sentencial que sólo tiene instancias de sustitución falsas se dice que es una *contradicción* o que es *contradictoria*, y los mismos términos se aplican a sus instancias de sustitución. La forma sentencial $p \cdot \sim p$ se prueba que es una contradicción por el hecho de que en su tabla de verdad sólo hay valores **F** en la columna que encabeza.

Enunciados y formas sentenciales que no son ni tautológicas ni contradictorias se dice que son *contingentes* o que son *contingencias*. Por ejemplo, p, $\sim p$, $p \vee q$, $p \cdot q$ y $p \supset q$ son formas sentenciales contingentes; y B, C, $\sim B$, $\sim C$, $B \cdot C$, $B \vee C$, son enunciados contingentes. El término es apropiado, pues sus valores de verdad no están formalmente determinados, sino que son dependientes o contingentes de la situación.

Fácilmente se demuestra que $p \supset (q \supset p)$ y $\sim p \supset \cdot (p \supset q)$ son tautologías. Al expresarlas en lenguaje ordinario como "Un enunciado verdadero es implicado por cualquier enunciado" y como "Un enunciado falso implica cualquier enunciado" parecen bastante extrañas. Algunos escritores las han llamado *las parodojas de la implicación material*. Pero si se tiene presente que el símbolo herradura es un conectivo de función de verdad que representa la *implicación material* y no la "implicación en general" o clases más usuales como son la implicación lógica o la implicación causal, entonces dichas formas sentenciales tautológicas no son sorprendentes en lo absoluto. Y al corregir esas engañosas formulaciones del castellano insertando la palabra "materialmente" antes de "implicado" e "implica", entonces desaparece el aire paradójico. La implicación material es una noción técnica y la motivación del lógico al introducirla y usarla es la enorme simplificación que resulta en su tarea de discriminar entre los argumentos válidos y los inválidos.

Dos enunciados se dicen *materialmente equivalentes* cuando tienen el mismo valor de verdad, y simbolizamos el enunciado de *que* son materialmente equivalentes insertando el símbolo "$\equiv$" entre ellos. Tratándose de un conectivo de función de verdad, el símbolo tres barras se define con la siguiente tabla de verdad:

p	q	$p \equiv q$
T	**T**	**T**
T	**F**	**F**
F	**T**	**F**
F	**F**	**T**

Decir que dos enunciados son materialmente equivalentes es decir que materialmente el uno implica el otro, como es fácil de verificar con una tabla de verdad. Así, el símbolo de las tres barras puede leerse "es materialmente equivalente con" o "si y sólo si". Un enunciado de la forma $p \equiv q$ se llama *bicondicional*. Dos enunciados se dicen *lógicamente equivalentes* cuando el bicondicional que expresa su equivalencia material es una tautología. El "principio de la Doble Negación", expresado como $p \equiv {\sim}{\sim}p$, con una tabla de verdad se demuestra que es tautológico.

Hay dos equivalencias lógicas que expresan importantes interrelaciones de las conjunciones, disyunciones y negaciones. Como una conjunción afirma que sus dos conyuntos son verdaderos, su negación sólo necesita afirmar que uno de los conyuntos es falso. Luego, negar la conjunción $p \cdot q$ equivale a afirmar la disyunción de las negaciones de p y q. Este enunciado de equivalencia se simboliza como ${\sim}(p \cdot q) \equiv ({\sim}p \vee {\sim}q)$ y se demuestra que es una tautología mediante la tabla de verdad:

p	q	$p \cdot q$	$\sim(p \cdot q)$	$\sim p$	$\sim q$	$\sim p \vee \sim q$	$\sim(p \cdot q) \equiv (\sim p \vee \sim q)$
T	T	T	F	F	F	F	T
T	F	F	T	F	T	T	T
F	T	F	T	T	F	T	T
F	F	F	T	T	T	T	T

De manera semejante, como una disyunción meramente afirma que al menos un disyunto es verdadero, negarla es afirmar que ambos son falsos. Negar la disyunción $p \vee q$ equivale a afirmar la conjunción de las negaciones de p y q. Se simboliza como $\sim(p \vee q) \equiv (\sim p \cdot \sim q)$, y con una tabla de verdad fácilmente se prueba que es una tautología. Estas dos equivalencias se conocen como Teoremas de De Morgan, por el lógico matemático inglés Augustus De Morgan (1806-1871), y en lenguaje ordinario pueden enunciarse de manera compendiada como: La negación de la $\left\{\begin{matrix}\text{conjunción}\\ \text{disyunción}\end{matrix}\right\}$ de dos enunciados es lógicamente equivalente a la $\left\{\begin{matrix}\text{disyunción}\\ \text{conjunción}\end{matrix}\right\}$ de sus negaciones.

Dos formas sentenciales se dicen lógicamente equivalentes si, no importando qué enunciados se sustituyan por sus variables sentenciales —poniendo el mismo enunciado en lugar de la misma variable sentencial en ambas formas sentenciales—, los pares resultantes de enunciados son equivalentes. Así, el Teorema de De Morgan afirma que $\sim(p \vee q)$ y $\sim p \cdot \sim q$ son formas sentenciales lógicamente equivalentes. Por el Teorema de De Morgan y el principio de la Doble Negación $\sim(p \cdot \sim q)$ y $\sim p \vee q$ son lógicamente equivalentes, luego cualquiera puede tomarse como definición de $p \supset q$; la segunda es la elección más usual.

A todo argumento corresponde un enunciado condicional cuyo antecedente es la conjunción de las premisas del argumento y cuyo consecuente es la conclusión del argumento. Ese condicional correspondiente es una tautología si y sólo si el argumento es válido. Así, a la forma argumental válida

$$\begin{array}{l} p \vee q \\ \sim p \\ \therefore q \end{array}$$

corresponde la forma sentencial tautológica $[(p \vee q) \cdot \sim p] \supset q$; y a la forma argumental inválida

$$\begin{array}{l} p \supset q \\ q \\ \therefore p \end{array}$$

corresponde la forma sentencial no tautológica $[(p \supset q) \cdot q] \supset p$. Una forma argumental es válida si y sólo si su tabla de verdad tiene el valor **T** bajo su conclusión en cada renglón en que haya el valor **T** bajo todas las premisas. Como puede aparecer una **F** en la columna encabezada por el condicional correspondiente sólo donde haya **T** bajo todas las premisas y **F** bajo la conclusión, es claro que sólo puede haber el valor **T** bajo un condicional que corresponde a una forma argumental válida. Si un argumento es válido, el enunciado de que la conjunción de sus premisas implica su conclusión es una tautología.

Una versión alternativa de la prueba de la tabla de verdad de una forma argumental sentencial es la siguiente, que corresponde a la tabla de verdad precedente:

$\sim$	$(p$		$q)$	$\equiv$	$(\sim$	p	$\vee$	$\sim$	$q)$
F	**T**	**T**	**T**	**T**	**F**	**T**	**F**	**F**	**T**
T	**T**	**F**	**F**	**T**	**F**	**T**	**T**	**T**	**F**
T	**F**	**F**	**T**	**T**	**T**	**F**	**T**	**F**	**T**
T	**F**	**F**	**F**	**T**	**T**	**F**	**T**	**T**	**F**
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)

Aquí las columnas (2), (4), (7), (10) son las columnas iniciales o guía. La columna (3) se llena con referencia a las columnas (2) y (4), y la columna (1) con referencia a la columna (3). La columna (6) se llena con referencia a la columna (7), la columna (9) se llena con referencia a la columna (10) y entonces la columna (8) con referencia a las columnas (6) y (9). Finalmente, la columna (5) se llena con referencia a las columnas (1) y (8). El hecho de que su conectivo principal tenga sólo valores **T** en su columna de la tabla de verdad, establece que la forma sentencial probada es una tautología.

EJERCICIOS

I. Use tablas de verdad para caracterizar las siguientes formas sentenciales como tautológicas, contradictorias o contingentes:

- ***1.** $p \supset \sim p$
- **2.** $(p \supset \sim p) \cdot (\sim p \supset p)$
- **3.** $p \supset (p \supset p)$
- **4.** $(p \supset p) \supset p$
- ***5.** $p \supset (p \cdot p)$
- **6.** $(p \cdot q) \supset p$
- **7.** $(p \supset q) \supset [\sim(q \cdot r) \supset \sim(r \cdot p)]$
- **8.** $(\sim p \cdot q) \cdot (q \supset p)$
- **9.** $[(p \supset q) \supset q] \supset q$
- **10.** $[(p \supset q) \supset p] \supset p$

II. Use tablas de verdad para decidir cuáles de las siguientes son equivalencias lógicas:

*1. $(p \supset q) \equiv (\sim p \supset \sim q)$

2. $(p \supset q) \equiv (\sim q \supset \sim p)$

3. $[(p \cdot q) \supset r] \equiv [p \supset (q \supset r)]$

4. $[p \supset (q \supset r)] \equiv [(p \supset q) \supset r]$

*5. $[p \cdot (q \vee r)] \equiv [(p \cdot q) \vee (p \cdot r)]$

6. $[p \vee (q \cdot r)] \equiv [(p \vee q) \cdot r]$

7. $[p \vee (q \cdot r)] \equiv [(p \vee q) \cdot (p \vee r)]$

8. $(p \equiv q) \equiv [(p \cdot q) \vee (\sim p \cdot \sim q)]$

9. $p \equiv [p \cdot (p \supset q)]$

10. $p \equiv [p \cdot (q \supset p)]$

3

El Método de Deducción

3.1. Prueba Formal de Validez

Cuando los argumentos contienen más de dos o tres enunciados simples diferentes como componentes, se hace difícil y tedioso utilizar tablas de verdad para probar su validez. Un método más conveniente de establecer la validez de algunos argumentos es *deducir* las conclusiones de sus premisas por una secuencia de argumentos más cortos y más elementales que ya se conoce que son válidos. Considérese, por ejemplo, el siguiente argumento en el que aparecen enunciados simples diferentes:

O el procurador general ha impuesto una censura estricta o si Black envió la carta que escribió, entonces Davis recibió un aviso.
Si nuestras líneas de comunicación no se han interrumpido por completo, entonces si Davis recibió un aviso, entonces Emory fue informado del asunto.
Si el procurador general ha impuesto una censura estricta, entonces nuestras líneas de comunicación se han interrumpido por completo.
Nuestras líneas de comunicación no se han interrumpido por completo.
Por tanto, si Black envió la carta que escribió, entonces Emory fue informado del asunto.

Se puede traducir en nuestro simbolismo como

$$A \vee (B \supset D)$$
$$\sim C \supset (D \supset E)$$
$$A \supset C$$
$$\sim C$$
$$\therefore B \supset E$$

Establecer la validez de este argumento por medio de una tabla de verdad requeriría una tabla de treinta y dos renglones. Pero podemos probar el argumento dado como válido deduciendo su conclusión de sus premisas por una secuencia de solamente cuatro argumentos cuya validez se ha señalado ya. De la tercera y cuarta premisas, $A \supset C$ y $\sim C$, válidamente inferimos $\sim A$ por *Modus Tol-*

lens. De $\sim A$ y la primera premisa $A \vee (B \supset D)$, válidamente inferimos $B \supset D$, por un Silogismo Disyuntivo. De la segunda y cuarta premisas, $\sim C \supset (D \supset E)$ y $\sim C$, válidamente se infiere $D \supset E$ por *Modus Ponens*. Y finalmente, de estas dos últimas conclusiones (o subconclusiones), $B \supset D$ y $D \supset E$, válidamente inferimos $B \supset E$ por un Silogismo Hipotético. Que su conclusión se deduce de sus premisas usando argumentos válidos exclusivamente, *prueba* que el argumento original es válido. Aquí las formas argumentales válidas elementales *Modus Ponens* (M.P.), *Modus Tollens* (M.T.), el Silogismo Disyuntivo (D.S.), y el Silogismo Hipotético (H.S.) se usan como *Reglas de Inferencia* por medio de las cuales se deducen válidamente las conclusiones a partir de las premisas.

Una manera más formal y más concisa de escribir esta prueba de validez es hacer una lista de las premisas y de los enunciados deducidos de ellas en una columna, con las "justificaciones" para estos últimos escritas a un lado de los mismos. En cada caso, la "justificación" para un enunciado especifica los enunciados precedentes a partir de los cuales, y la regla de inferencia por medio de la cual, el enunciado en cuestión fue deducido. Es conveniente poner la conclusión a la derecha de la última premisa, separada de la misma por una línea diagonal que automáticamente señala que todos los enunciados que están por arriba de la misma son premisas. La prueba formal de validez para el argumento dado puede escribirse como

1.	$A \vee (B \supset D)$	
2.	$\sim C \supset (D \supset E)$	
3.	$A \supset C$	
4.	$\sim C$	$/ \therefore B \supset E$
5.	$\sim A$	3, 4, M.T.
6.	$B \supset D$	1, 5, D.S.
7.	$D \supset E$	2, 4, M.P.
8.	$B \supset E$	6, 7, H.S.

Una *prueba formal de validez* para un argumento dado se define como una sucesión de enunciados, cada uno de los cuales es una premisa de ese argumento o se sigue de los precedentes por un argumento válido elemental, y tal que el último enunciado de la secuencia es la conclusión del argumento cuya validez se está demostrando. Esta definición debe completarse y hacerse más precisa especificando qué es lo que va a contar como "argumento válido elemental". Primero definimos un *argumento válido elemental* como cualquier argumento que es una instancia de sustitución de una forma de argumento válida, y después presentamos una lista de sólo nueve formas de argumento suficientemente obvias para ser vistas como formas de argumento válidas elementales y aceptadas como Reglas de Inferencia.

Una cuestión que hay que recalcar es que *cualquier* instancia de sustitución de una forma de argumento válida elemental es un argumento válido elemental. Así, el argumento

$$\begin{array}{l} \sim C \supset (D \supset E) \\ \sim C \\ \therefore D \supset E \end{array}$$

es un argumento válido elemental porque es una instancia de sustitución de la forma de argumento válida elemental *Modus Ponens* (M.P.). Resulta de

$$\begin{array}{l} p \supset q \\ p \\ \therefore q \end{array}$$

sustituyendo $\sim C$ por p y $D \supset E$ por q, así que es de esa forma aun cuando *Modus Ponens* no es *la forma específica* del argumento dado.

Iniciamos nuestro desarrollo del método de deducción presentando una lista de sólo nueve formas de argumento válidas elementales que pueden usarse al construir pruebas formales de validez:

REGLAS DE INFERENCIA

1. *Modus Ponens* (M.P.)
   $p \supset q$
   p
   $\therefore q$
2. *Modus Tollens* (M.T.)
   $p \supset q$
   $\sim q$
   $\therefore \sim p$
3. Silogismo Hipotético (H.S.)
   $p \supset q$
   $q \supset r$
   $\therefore p \supset r$
4. Silogismo Disyuntivo (D.S.)
   $p \vee q$
   $\sim p$
   $\therefore q$
5. Dilema Constructivo (C.D.)
   $(p \supset q) \cdot (r \supset s)$
   $p \vee r$
   $\therefore q \vee s$
6. Dilema Destructivo (D.D.)
   $(p \supset q) \cdot (r \supset s)$
   $\sim q \vee \sim s$
   $\therefore \sim p \vee \sim r$
7. Simplificación (Simp.)
   $p \cdot q$
   $\therefore p$
8. Conjunción (Conj.)
   p
   q
   $\therefore p \cdot q$
9. Adición (Ad.)
   p
   $\therefore p \vee q$

Estas nueve reglas de inferencia son formas válidas elementales de argumentos cuya validez fácilmente se establece mediante tablas de verdad. Pueden usarse para construir pruebas formales de validez para una amplia clase de argumentos más complicados. Los nombres de la lista son estándar en su mayor parte, y el uso de sus abreviaciones permite presentar las pruebas formales con un mínimo de escritura.

EJERCICIOS

I. **Para cada uno de los argumentos siguientes enuncie la Regla de Inferencia por la que su conclusión sigue de su o sus premisas:**

***1.** $(A \supset \sim B) \cdot (\sim C \supset D)$
$\therefore A \supset \sim B$

2. $E \supset \sim F$
$\therefore (E \supset \sim F) \vee (\sim G \supset H)$

3. $(I \equiv \sim J) \cdot (I \equiv \sim J)$
$\therefore I \equiv \sim J$

4. $K \vee (L \vee M)$
$\therefore [K \vee (L \vee M)] \vee [K \vee (L \vee M)]$

***5.** $N \supset (O \equiv \sim P)$
$(O \equiv \sim P) \supset Q$
$\therefore N \supset Q$

6. $(R \equiv \sim S) \supset (T \supset U)$
$R \equiv \sim S$
$\therefore T \supset U$

7. $(V \supset W) \vee (X \supset Y)$
$\sim(V \supset W)$
$\therefore X \supset Y$

8. $(A \supset \sim B) \cdot [C \supset (D \cdot E)]$
$\sim\sim B \vee \sim(D \cdot E)$
$\therefore \sim A \vee \sim C$

9. $(F \supset \sim G) \supset (\sim H \vee \sim I)$
$F \supset \sim G$
$\therefore \sim H \vee \sim I$

***10.** $[\sim(J \cdot K) \supset \sim L] \cdot (M \supset \sim N)$
$\sim(J \cdot K) \vee M$
$\therefore \sim L \vee \sim N$

11. $O \supset \sim P$
$\sim P \supset Q$
$\therefore (O \supset \sim P) \cdot (\sim P \supset Q)$

12. $(\sim R \equiv S) \vee (T \vee U)$
$\sim(\sim R \equiv S)$
$\therefore T \vee U$

13. $[(V \cdot \sim W) \supset X] \cdot [(W \cdot \sim Y) \supset Z]$
$(V \cdot \sim W) \vee (W \cdot \sim Y)$
$\therefore X \vee Z$

14. $[A \supset (B \vee C)] \supset [(D \cdot E) \equiv \sim F]$
$\sim[(D \cdot E) \equiv \sim F]$
$\therefore \sim[A \supset (B \vee C)]$

15. $\sim[G \supset (H \vee I)] \cdot \sim[(J \cdot K) \supset L]$
$\therefore \sim[G \supset (H \vee I)]$

II. **Cada una de las siguientes es una prueba formal de validez para el argumento indicado. Enuncie la "justificación" de cada renglón que no sea una premisa:**

***1.**
1. $(A \cdot B) \supset [A \supset (D \cdot E)]$
2. $(A \cdot B) \cdot C \quad / \therefore D \vee E$
3. $A \cdot B$
4. $A \supset (D \cdot E)$
5. A
6. $D \cdot E$
7. D
8. $D \vee E$

2. 1. $F \vee (G \vee H)$
2. $(G \supset I) \cdot (H \supset J)$
3. $(I \vee J) \supset (F \vee H)$
4. $\sim F \quad /\therefore H$
5. $G \vee H$
6. $I \vee J$
7. $F \vee H$
8. H

3. 1. $K \supset L$
2. $M \supset N$
3. $(O \supset N) \cdot (P \supset L)$
4. $(\sim N \vee \sim L) \cdot (\sim M \vee \sim O)$
$/\therefore (\sim O \vee \sim P) \cdot (\sim M \vee \sim K)$
5. $(M \supset N) \cdot (K \supset L)$
6. $\sim N \vee \sim L$
7. $\sim M \vee \sim K$
8. $\sim O \vee \sim P$
9. $(\sim O \vee \sim P) \cdot (\sim M \vee \sim K)$

4. 1. $Q \supset (R \supset S)$
2. $(R \supset S) \supset T$
3. $(S \cdot U) \supset \sim V$
4. $\sim V \supset (R \equiv \sim W)$
5. $\sim T \vee \sim (R \equiv \sim W)$
$/\therefore \sim Q \vee \sim (S \cdot U)$
6. $Q \supset T$
7. $(S \cdot U) \supset (R \equiv \sim W)$
8. $[Q \supset T] \cdot [(S \cdot U) \supset (R \equiv \sim W)]$
9. $\sim Q \vee \sim (S \cdot U)$

***5.** 1. $(\sim X \vee \sim Y) \supset [A \supset (P \cdot \sim Q)]$
2. $(\sim X \cdot \sim R) \supset [(P \cdot \sim Q) \supset Z]$
3. $(\sim X \cdot \sim R) \cdot (\sim Z \vee A)$
$/\therefore A \supset Z$
4. $\sim X \cdot \sim R$
5. $(P \cdot \sim Q) \supset Z$
6. $\sim X$
7. $\sim X \vee \sim Y$
8. $A \supset (P \cdot \sim Q)$
9. $A \supset Z$

6. 1. $A \supset B$
2. $C \supset D$
3. $\sim B \vee \sim D$
4. $\sim\sim A$
5. $(E \cdot F) \supset C \quad /\therefore \sim (E \cdot F)$
6. $(A \supset B) \cdot (C \supset D)$
7. $\sim A \vee \sim C$
8. $\sim C$
9. $\sim (E \cdot F)$

7. 1. $(G \supset H) \supset (I \equiv J)$
2. $K \vee \sim (L \supset M)$
3. $(G \supset H) \vee \sim K$
4. $N \supset (L \supset M)$
5. $\sim (I \equiv J) \quad /\therefore \sim N$
6. $\sim (G \supset H)$
7. $\sim K$
8. $\sim (L \supset M)$
9. $\sim N$

8. 1. $(O \supset \sim P) \cdot (\sim Q \supset R)$
2. $(S \supset T) \cdot (\sim U \supset \sim V)$
3. $(\sim P \supset S) \cdot (R \supset \sim U)$
4. $(T \vee \sim V) \supset (W \cdot X)$
5. $O \vee \sim Q \quad /\therefore W \cdot X$
6. $\sim P \vee R$
7. $S \vee \sim U$
8. $T \vee \sim V$
9. $W \cdot X$

9. 1. $[(A \vee \sim B) \vee C] \supset [D \supset (E \equiv F)]$
2. $(A \vee \sim B) \supset [(F \equiv G) \supset H]$
3. $A \supset [(E \equiv F) \supset (F \equiv G)]$
4. $A \quad /\therefore D \supset H$
5. $A \vee \sim B$
6. $(A \vee \sim B) \vee C$
7. $D \supset (E \equiv F)$
8. $(E \equiv F) \supset (F \equiv G)$
9. $D \supset (F \equiv G)$
10. $(F \equiv G) \supset H$
11. $D \supset H$

***10.** 1. $H \supset (I \supset J)$
2. $K \supset (I \supset J)$
3. $(\sim H \cdot \sim K) \supset (\sim L \vee \sim M)$
4. $(\sim L \supset \sim N) \cdot (\sim M \supset \sim O)$
5. $(P \supset N) \cdot (Q \supset O)$
6. $\sim (I \supset J) \quad /\therefore \sim P \vee \sim Q$
7. $\sim H$
8. $\sim K$
9. $\sim H \cdot \sim K$
10. $\sim L \vee \sim M$
11. $\sim N \vee \sim O$
12. $\sim P \vee \sim Q$

III. Construir una prueba formal de validez para cada uno de los siguientes argumentos:

*1. $A \supset B$
$C \supset D$
$(\sim B \vee \sim D) \cdot (\sim A \vee \sim B)$
$\therefore \sim A \vee \sim C$

2. $E \supset (F \cdot \sim G)$
$(F \vee G) \supset H$
E
$\therefore H$

3. $J \supset K$
$J \vee (K \vee \sim L)$
$\sim K$
$\therefore \sim L \cdot \sim K$

4. $M \supset N$
$N \supset O$
$(M \supset O) \supset (N \supset P)$
$(M \supset P) \supset Q$
$\therefore Q$

*5. $(R \supset \sim S) \cdot (T \supset \sim U)$
$(V \supset \sim W) \cdot (X \supset \sim Y)$
$(T \supset W) \cdot (U \supset S)$
$V \vee R$
$\therefore \sim T \vee \sim U$

6. $A \supset (B \cdot C)$
$\sim A \supset [(D \supset E) \cdot (F \supset G)]$
$(B \cdot C) \vee [(\sim A \supset D) \cdot (\sim A \supset F)]$
$\sim (B \cdot C) \cdot \sim (G \cdot D)$
$\therefore E \vee G$

7. $(\sim H \vee I) \supset (J \supset K)$
$(\sim L \cdot \sim M) \supset (K \supset N)$
$(H \supset L) \cdot (L \supset H)$
$(\sim L \cdot \sim M) \cdot \sim O$
$\therefore J \supset N$

8. $(P \supset Q) \cdot (R \supset S)$
$(Q \supset T) \cdot (S \supset U)$
$(\sim P \supset T) \cdot (\sim Q \supset S)$
$\sim T$
$\therefore \sim R \vee \sim Q$

9. $V \supset W$
$X \supset Y$
$Z \supset W$
$X \supset A$
$W \supset X$
$[(V \supset Y) \cdot (Z \supset A)] \supset (V \vee Z)$
$\therefore Y \vee A$

10. $(B \vee C) \supset (D \vee E)$
$[(D \vee E) \vee F] \supset (G \vee H)$
$(G \vee H) \supset \sim D$
$E \supset \sim G$
B
$\therefore H$

IV. Construir una prueba formal de validez para cada uno de los siguientes argumentos, utilizando las abreviaciones que se sugieren:

*1. Si se requiere ya sea álgebra o geometría, entonces todos los estudiantes cursarán matemáticas. Se requiere el álgebra y se requiere la trigonometría. Por lo tanto, todos los estudiantes tomarán matemáticas. (*A*: Algebra es requisito. *G*: Geometría es requisito. *S*: Todos los estudiantes cursarán matemáticas. *T*: Trigonometría es requisito.)

2. O Smith asistió a la reunión o Smith no fue invitado a la reunión. Si los directcres deseaban la presencia de Smith en la reunión entonces Smith fue invitado a la reunión. Smith no asistió a la reunión. Si los directores no deseaban la presencia de Smith en la reunión y Smith no fue invitado a la reunión, entonces Smith está en camino hacia fuera de la compañía. Por lo tanto, Smith está en camino hacia fuera de la compañía (*A*: Smith asistió a la reunión. *I*: Smith fue invitado a la reunión. *D*: Los directores deseaban la presencia de Smith en la reunión. *C*: Smith está en camino hacia fuera de la compañía.)

3. Si se desarrolla una escasez de artículos de consumo hay alza de precios. Si hay un cambio en el gobierno no seguirán los controles fiscales. Si la amenaza de inflación persiste seguirán los controles fiscales. Si hay sobreproducción no hay alza de precios. O hay sobreproducción o hay un cambio de gobierno. Por lo tanto, o no se desarrolla una escasez de artículos de consumo o la amenaza de inflación no persiste. (*E*: Se desarrolla una escasez de artículos de consumo. *P*: Hay alza de precios. *C*: Hay un cambio de gobierno. *F*: Siguen los controles fiscales. *I*: Persiste la amenaza de inflación. *S*: Hay sobreproducción.)
4. Si continúa la investigación se descubre nueva evidencia. Si se descubre nueva evidencia, entonces muchos importantes ciudadanos son implicados. Si muchos importantes ciudadanos son implicados, entonces los periódicos detienen la publicación del caso. Si la continuación de la investigación implica que los periódicos detienen la publicación del caso, entonces el descubrimiento de nueva evidencia implica que la investigación continúa. La investigación no continúa. Por lo tanto, no se descubre nueva evidencia. (*C*: La investigación continúa. *N*: Se descubre nueva evidencia. *I*: Son implicados muchos importantes ciudadanos. *D*: Los periódicos detienen la publicación del caso.)
5. Si el rey no se enroca y el peón avanza, entonces o el alfil queda bloqueado o la torre inmovilizada. Si el rey no se enroca, entonces, si el alfil queda bloqueado entonces el juego es tablas. O el rey se enroca o si la torre es inmovilizada se pierde el cambio. El rey no se enroca y el peón avanza. Por lo tanto, o el juego es tablas o se pierde el cambio. (*K*: El rey se enroca. *P*: El peón avanza. *B*: El alfil es bloqueado. *R*: La torre es inmovilizada. *D*: El juego es tablas. *E*: Se pierde el cambio.)
6. Si Andrews está presente entonces Brown está presente, y si Brown está presente entonces Cohen no está presente. Si Cohen está presente entonces Davis no está presente. Si Brown está presente, entonces Emerson está presente. Si Davis no está presente entonces Farley está presente. O Emerson no está presente o Farley no está presente. Por lo tanto, o Andrews no está presente o Cohen no está presente. (*A*: Andrews está presente *B*: Brown está presente. *C*: Cohen está presente. *D*: Davis está presente. *E*: Emerson está presente. *F*: Farley está presente.)
7. Si o Jorge se inscribe o Harry se inscribe entonces Ira no se inscribe. O Ira se inscribe o Harry se inscribe. Si o Harry se inscribe o Jorge no se inscribe entonces Jaime se inscribe. Jorge se inscribe. Por lo tanto, o Jaime se inscribe o Harry no se inscribe. (*J*: Jorge se inscribe, *H*: Harry se inscribe. *I*: Ira se inscribe. *J*: Jaime se inscribe.)
8. Si Tomás recibió el mensaje entonces Tomás tomó el avión, pero si Tomás no tomó el avión, entonces Tomás faltó a la reunión. Si Tomás faltó a la reunión, entonces David fue elegido consejero, pero si David fue elegido consejero, entonces Tomás recibió el mensaje. Si o Tomás no faltó a la reunión o Tomás no recibió el aviso, entonces o Tomás no tomó el avión o David fue elegido consejero. Tomás no faltó a la reunión. Por lo tanto, o Tomás no recibió el mensaje o Tomás no faltó a la reunión. (*R*: Tomás recibió el men-

saje. A: Tomás tomó el avión. F: Tomás faltó a la reunión. D: David fue elegido consejero.)

9. Si Dick fue vacunado hace poco entonces él tiene fiebre. O Dick fue vacunado hace poco tiempo o si aparecen viruelas entonces Dick debe ser aislado. O Dick tiene sarampión o si se le desarrolla salpullido entonces hay complicaciones. Si Dick tiene sarampión entonces tiene fiebre. Si Dick no fue vacunado hace poco y Dick no tiene sarampión, entonces o se le desarrolla salpullido o aparecen viruelas. Dick no tiene fiebre. Por lo tanto, o hay complicaciones o Dick debe ser aislado. (V: Dick fue vacunado hace poco. F: Dick tiene fiebre. V: Le salen viruelas. A: Dick debe ser aislado. S: Dick tiene sarampión. R: Le sale salpullido. C: Hay complicaciones.)

*10. O aumentaron los impuestos o si aumentan los gastos se eleva la deuda. Si los impuestos aumentaron entonces el costo de recaudar los impuestos crece. Si un aumento en los gastos implica que el gobierno pide prestado más dinero, entonces si se eleva la deuda aumentan las tasas de interés. Si no se aumentan los impuestos y el costo de recaudación de impuestos no crece, entonces si la deuda no se eleva entonces el gobierno pide prestado más dinero. El costo de recaudación de impuestos no crece. O las tasas de interés no aumentan o el gobierno no pide prestado más dinero. Por lo tanto, o la deuda no se eleva o los gastos no aumentan. (T: Aumentan los impuestos. E: Aumentan los gastos. D: Se eleva la deuda. C: El costo de recaudación de impuestos crece. G: El gobierno pide prestado más dinero. I: Aumentan las tasas de interés.)

3.2. La Regla de Reemplazo

Hay muchos argumentos válidos de función de verdad cuya validez no se puede probar usando solamente las nueve Reglas de Inferencia dadas hasta aquí. Por ejemplo, una prueba formal de validez del argumento obviamente válido

$$A \cdot B$$
$$\therefore B$$

requiere Reglas de Inferencia adicionales.

Ahora bien, los únicos enunciados compuestos que nos interesan aquí son los enunciados compuestos función de verdad. Luego, si se reemplaza una parte cualquiera de un enunciado compuesto por una expresión que es lógicamente equivalente a la parte reemplazada, el valor de verdad del enunciado que resulta es el mismo que el del enunciado original. A esto se le llama, algunas veces, la Regla de Reemplazo, y otras, la del Principio de Extensionalidad.[1] Adoptamos la Regla de Reemplazo como un principio adicional de

[1] Se enunciará más formalmente, en un contexto apropiado, y se le demostrará en el Cap. 7.

inferencia. Nos permite inferir de cualquier enunciado el resultado de reemplazar todo o parte de ese enunciado por otro enunciado lógicamente equivalente a la parte reemplazada. Así, usando el principio de la Doble Negación (D.N.), que afirma la equivalencia lógica de p y $\sim\sim p$, podemos inferir, de $A \supset \sim\sim B$ cualquiera de los enunciados,

$$A \supset B, \sim\sim A \supset \sim\sim B, A \supset \sim\sim\sim\sim B, \quad \text{o} \quad \sim\sim(A \supset \sim\sim B)$$

por la Regla de Reemplazo.

Para hacer más definida esta regla, damos ahora una lista de equivalencias lógicas con las que puede usarse. Estas equivalencias constituyen nuevas Reglas de Inferencia que es posible usar para probar la validez de argumentos. Las numeramos consecutivamente después de las nueve reglas ya enunciadas.

Regla de Reemplazo: Cualquiera de las siguientes expresiones lógicamente equivalentes puede reemplazar a la otra en donde ocurran:

10. **Teoremas de De Morgan (De M.):**	$\sim(p \cdot q) \equiv (\sim p \vee \sim q)$. $\sim(p \vee q) \equiv (\sim p \cdot \sim q)$.
11. **Conmutación (Conm.):**	$(p \vee q) \equiv (q \vee p)$. $(p \cdot q) \equiv (q \cdot p)$.
12. **Asociación (Asoc.):**	$[p \vee (q \vee r)] \equiv [(p \vee q) \vee r]$. $[p \cdot (q \cdot r)] \equiv [(p \cdot q) \cdot r]$.
13. **Distribución (Dist.):**	$[p \cdot (q \vee r)] \equiv [(p \cdot q) \vee (p \cdot r)]$. $[p \vee (q \cdot r)] \equiv [(p \vee q) \cdot (p \vee r)]$.
14. **Doble Negación (D.N.):**	$p \equiv \sim\sim p$.
15. **Transposición (Trans.):**	$(p \supset q) \equiv (\sim q \supset \sim p)$.
16. **Implicación Material (Impl.):**	$(p \supset q) \equiv (\sim p \vee q)$.
17. **Equivalencia Material (Equiv.):**	$(p \equiv q) \equiv [(p \supset q) \cdot (q \supset p)]$. $(p \equiv q) \equiv [(p \cdot q) \vee (\sim p \cdot \sim q)]$.
18. **Exportación (Exp.):**	$[(p \cdot q) \supset r] \equiv [p \supset (q \supset r)]$.
19. **Tautología (Taut.):**	$p \equiv (p \vee p)$. $p \equiv (p \cdot p)$.

Ahora puede escribirse una prueba formal de validez para el argumento dado al principio del párrafo 3.2:

1. $A \cdot B$ $\quad /\therefore B$
2. $B \cdot A$ $\qquad$ 1, Conm.
3. B $\qquad$ 2, Simp.

Algunas formas de argumento, aunque muy elementales y perfectamente válidas, no se incluyen en nuestra lista de diecinueve Reglas de Inferencia. Aunque el argumento

$$A \cdot B$$
$$\therefore B$$

es obviamente válido, su forma

$$p \cdot q$$
$$\therefore q$$

no está incluida en nuestra lista. Por tanto, B no se sigue de $A \cdot B$ por ningún argumento válido elemental *según los define nuestra lista*. Puede, sin embargo, deducirse usando *dos* argumentos válidos elementales como mostramos antes. Podríamos agregar la forma de argumento intuitivamente válida

$$p \cdot q$$
$$\therefore q$$

a nuestra lista, claro está; pero si agrandáramos nuestra lista de esta manera llegaríamos a tener una lista demasiado larga y, por tanto, no manejable.

La lista de las Reglas de Inferencia contiene numerosas redundancias. Por ejemplo, *Modus Tollens* podría salir de la lista sin realmente debilitar la maquinaria, pues todo paso deducido usándola puede serlo usando otras Reglas de la lista. Así, en nuestra primera prueba del capítulo en la Pág. 50, en el renglón 5, $\sim A$, que se dedujo de los renglones 3 y 4, $A \supset C$ y $\sim C$, por *Modus Tollens*, pudo haber sido deducida sin ésta, pues $\sim C \supset \sim A$, se sigue de $A \supset C$ por Transposición, y $\sim A$ de $\sim C \supset \sim A$ y $\sim C$ por *Modus Ponens*. Pero *Modus Tollens* es un principio de inferencia tan común e intuitivo que se le ha incluido, y otros han sido incluidos por conveniencia, también, a pesar de su redundancia lógica.

La prueba de que una sucesión dada de enunciados es una demostración formal, es *efectiva*. Es decir, por observación directa se podrá deducir si cada renglón siguiente a las premisas se sigue o no de los renglones que le preceden mediante alguna de las Reglas de Inferencia dadas. No es necesario "pensar": ni pensar sobre el significado de los enunciados, ni usar intuición lógica para verificar la validez de la deducción de cada renglón. Aun en donde falte la "justificación" de un enunciado, a un lado del mismo, hay un procedimiento finito, mecánico, para decidir si la deducción es legítima. Cada renglón viene precedido por solamente un número finito de renglones y sólo se han adoptado un número finito de Reglas de Inferencia. Aunque toma tiempo, puede verificarse por inspección si el renglón en cuestión se sigue de algún renglón, o par de renglones precedentes mediante alguna Regla de Inferencia de nuestra lista. Por ejemplo, en la demostración precedente, el renglón 2, $B \cdot A$, está precedido sólo por el renglón 1, $A \cdot B$. Su legitimidad puede decidirse viendo que aunque no se sigue de $A \cdot B$ por *Modus Ponens*, ni por

Modus Tollens, ni por un Silogismo Hipotético y así sucesivamente hasta el número 10, al llegar al número 11, podemos *ver*, que el renglón 2 se sigue del renglón 1 por el principio de Conmutación. Así también, la legitimidad de cualquier renglón puede decidirse por un número finito de observaciones, ninguna de las cuales entraña más que comparación de formas y esquemas. Para preservar esta efectividad establecemos la regla que sólo ha de aplicarse una Regla de Inferencia a la vez. La notación explicativa a un lado de cada enunciado no es, estrictamente hablando, parte de la demostración, pero es útil y siempre debiera incluírsele.

Aunque la prueba de que una secuencia dada de enunciados es o no es una demostración formal, es efectiva, *construir* una demostración formal tal *no* es un procedimiento efectivo. A este respecto el método presente difiere del método del capítulo anterior. El uso de tablas de verdad es *completamente* mecánico: dado cualquier argumento de la clase general de la que ahora nos ocupamos, su validez siempre puede ser probada siguiendo las reglas simples presentadas en el Cap. 2. Pero al construir una prueba formal de validez basándose en las diecinueve Reglas de Inferencia de la lista, es necesario *pensar* o "imaginar" dónde empieza y cómo proceder. Aunque no existe método de procedimiento efectivo o puramente mecánico, es esencialmente mucho más fácil construir una prueba formal de validez que escribir una tabla de verdad con docenas o cientos o aun miles de renglones.

Hay una diferencia importante entre las primeras nueve y las últimas diez Reglas de Inferencia. Las primeras nueve pueden aplicarse a renglones enteros de una demostración. De este modo A puede inferirse de $A \cdot B$ por simplificación sólo si $A \cdot B$ constituye un renglón completo. Pero ni A ni $A \supset C$ se siguen de $(A \cdot B) \supset C$ por simplificación o cualquier otra Regla de Inferencia. A no es consecuencia porque A puede ser falso y $(A \cdot B) \supset C$ verdadero. $A \supset C$ no es consecuencia porque si A es verdadero y B y C ambos son falsos, $(A \cdot B) \supset C$ es verdadero mientras que $A \supset C$ es falso. Por otro lado, cualquiera de las diez últimas Reglas de Inferencia puede aplicarse a renglones enteros o partes de renglones. No sólo puede inferirse el enunciado $A \supset (B \supset C)$ del renglón entero $(A \cdot B) \supset C$ por Exportación, sino del renglón $[(A \cdot B) \supset C] \vee D$ podemos inferir $[A \supset (B \supset C)] \vee D$ por Exportación. La Regla de Reemplazo autoriza que expresiones lógicamente equivalentes especificadas se reemplacen entre sí donde ocurran, aun en donde no constituyan renglones enteros de una demostración. Pero las nueve primeras Reglas de Inferencia sólo pueden usarse tomando como premisas renglones enteros de una demostración.

En ausencia de reglas mecánicas para la construcción de demostraciones formales de validez, pueden darse algunas sugerencias y métodos prácticos. La primera es simplemente empezar deduciendo conclusiones de las premisas mediante las Reglas de Inferencia dadas. Al tener más y más subconclusiones de éstas como premisas para nuevas deducciones, mayor es la probabilidad de que se vea cómo deducir la conclusión del argumento que se quiere demostrar que es válido.

Otra sugerencia es tratar de eliminar enunciados que ocurren en las premisas, pero no en la conclusión. Esta eliminación puede llevarse a cabo solamente de acuerdo con las Reglas de Inferencia. Pero las Reglas contienen muchas técnicas para eliminar enunciados. La simplificación es una de ellas: con ésta, el conyunto derecho de una conjunción puede simplemente quitarse, a condición de que la conjunción sea un renglón entero en la demostración. Y por Conmutación puede hacerse derecho al enunciado conyunto izquierdo de una conjunción para eliminarlo por Simplificación. El término "medio" q puede eliminarse por un Silogismo Hipotético dadas dos premisas o subconclusiones de los patrones $p \supset q$ y $q \supset r$. La distribución es una regla útil para transformar una disyunción de la forma $p \vee (q \cdot r)$ en la conjunción $(p \vee q) \cdot (p \vee r)$ cuyo conjunto de la derecha $p \vee r$ puede entonces eliminarse por Simplificación. Otro método práctico es introducir por Adición un enunciado que ocurre en la conclusión, pero no en las premisas. Otro método es el de proceder hacia atrás desde la conclusión buscando algún enunciado o par de enunciados de los cuales se le pudiera deducir mediante algunas de las Reglas de Inferencia, y entonces tratar de deducir esos enunciados intermedios, ya sea de las premisas o de otros enunciados intermedios, y así sucesivamente, hasta llegar a algunos que sean deducibles de las premisas. Una adecuada combinación de estos métodos es a menudo, la mejor manera de proceder. La práctica, desde luego, es el mejor de los métodos para adquisición de habilidad en el método de deducción.

EJERCICIOS

I. Para cada uno de los siguientes argumentos de la Regla de Inferencia por la que se sigue su conclusión de su premisa:

*1. $(\sim A \supset B) \cdot (C \vee \sim D)$
$\therefore (\sim A \supset B) \cdot (\sim D \vee C)$

2. $(\sim E \vee F) \cdot (G \vee \sim H)$
$\therefore (E \supset F) \cdot (G \vee \sim H)$

3. $(I \supset \sim J) \vee (\sim K \supset \sim L)$
$\therefore (I \supset \sim J) \vee (L \supset K)$

4. $M \supset \sim(N \vee \sim O)$
$\therefore M \supset (\sim N \cdot \sim\sim O)$

*5. $[P \supset (Q \vee R)] \vee [P \supset (Q \vee R)]$
$\therefore P \supset (Q \vee R)$

6. $[S \cdot (T \cdot U)] \supset (V \equiv \sim W)$
$\therefore [(S \cdot T) \cdot U] \supset (V \equiv \sim W)$

7. $[X \cdot (Y \cdot Z)] \supset (A \equiv \sim B)$
$\therefore X \supset [(Y \cdot Z) \supset (A \equiv \sim B)]$

8. $(C \cdot \sim D) \supset (E \equiv \sim F)$
$\therefore (C \cdot \sim D) \supset [(E \cdot \sim F) \vee (\sim E \cdot \sim\sim F)]$

9. $(G \vee H) \cdot (I \vee J)$
$\therefore [(G \vee H) \cdot I] \vee [(G \vee H) \cdot J]$

*10. $(K \cdot L) \supset \{M \cdot [(N \cdot O) \cdot P]\}$
$\therefore (K \cdot L) \supset \{M \cdot [(O \cdot N) \cdot P]\}$

11. $\sim\{Q \vee \sim[(R \cdot \sim S) \cdot (T \vee \sim U)]\}$
$\therefore \sim\{Q \vee [\sim(R \cdot \sim S) \vee \sim(T \vee \sim U)]\}$

12. $\sim V \supset \{W \supset [\sim(X \cdot Y) \supset \sim Z]\}$
$\therefore \sim V \supset \{[W \cdot \sim(X \cdot Y)] \supset \sim Z\}$

13. $[A \vee (B \vee C)] \vee [(D \vee D) \vee E]$
$\therefore [A \vee (B \vee C)] \vee [D \vee (D \vee E)]$

14. $(F \supset G) \cdot \{[(G \supset H) \cdot (H \supset G)] \supset (H \supset I)\}$
$\therefore (F \supset G) \cdot \{(G \equiv H) \supset (H \supset I)\}$

*15. $J \equiv \sim\{[(K \cdot \sim L) \vee \sim M] \cdot [(K \cdot \sim L) \vee \sim N]\}$
$\therefore J \equiv \sim\{(K \cdot \sim L) \vee (\sim M \cdot \sim N)\}$

16. $O \supset [(P \cdot \sim Q) \equiv (P \cdot \sim\sim R)]$
$\therefore O \supset [(P \cdot \sim Q) \equiv (\sim\sim P \cdot \sim\sim R)]$

17. $\sim S \equiv \{\sim\sim T \supset [\sim\sim\sim U \vee (\sim T \cdot S)]\}$
$\therefore \sim S \equiv \{\sim\sim\sim T \vee [\sim\sim\sim U \vee (\sim T \cdot S)]\}$

18. $V \supset \{(\sim W \supset \sim\sim X) \vee [(\sim Y \supset Z) \vee (\sim Z \supset \sim Y)]\}$
$\therefore V \supset \{(\sim X \supset W) \vee [(\sim Y \supset Z) \vee (\sim Z \supset \sim Y)]\}$

19. $(A \cdot \sim B) \supset [(C \cdot C) \supset (C \supset D)]$
$\therefore (A \cdot \sim B) \supset [C \supset (C \supset D)]$

20. $(E \cdot \sim F) \supset [G \supset (G \supset H)]$
$\therefore (E \cdot \sim F) \supset [(G \cdot G) \supset H)]$

II. Cada una de las siguientes es una demostración formal de validez para el argumento indicado. Enunciar la "justificación" para cada renglón que no sea una premisa.

*1.
1. $(A \vee B) \supset (C \cdot D)$
2. $\sim C \quad / \therefore \sim B$
3. $\sim C \vee \sim D$
4. $\sim(C \cdot D)$
5. $\sim(A \vee B)$
6. $\sim A \cdot \sim B$
7. $\sim B \cdot \sim A$
8. $\sim B$

2.
1. $(E \cdot F) \cdot G$
2. $(F \equiv G) \supset (H \vee I) \quad / \therefore I \vee H$
3. $E \cdot (F \cdot G)$
4. $(F \cdot G) \cdot E$
5. $F \cdot G$
6. $(F \cdot G) \vee (\sim F \cdot \sim G)$
7. $F \equiv G$
8. $H \vee I$
9. $I \vee H$

3. 1. $(J \cdot K) \supset L$
2. $(J \supset L) \supset M$
3. $\sim K \vee N \quad /\therefore K \supset (M \cdot N)$
4. $(K \cdot J) \supset L$
5. $K \supset (J \supset L)$
6. $K \supset M$
7. $\sim K \vee M$
8. $(\sim K \vee M) \cdot (\sim K \vee N)$
9. $\sim K \vee (M \cdot N)$
10. $K \supset (M \cdot N)$

4. 1. $(O \supset \sim P) \cdot (P \supset Q)$
2. $Q \supset O$
3. $\sim R \supset P \quad /\therefore R$
4. $\sim Q \vee O$
5. $O \vee \sim Q$
6. $(O \supset \sim P) \cdot (\sim Q \supset \sim P)$
7. $\sim P \vee \sim P$
8. $\sim P$
9. $\sim\sim R$
10. R

***5.** 1. $S \supset (T \supset U)$
2. $U \supset \sim U$
3. $(V \supset S) \cdot (W \supset T) \quad /\therefore V \supset \sim W$
4. $(S \cdot T) \supset U$
5. $\sim U \vee \sim U$
6. $\sim U$
7. $\sim (S \cdot T)$
8. $\sim S \vee \sim T$
9. $\sim V \vee \sim W$
10. $V \supset \sim W$

6. 1. $X \supset (Y \supset Z)$
2. $X \supset (A \supset B)$
3. $X \cdot (Y \vee A)$
4. $\sim Z \quad /\therefore B$
5. $(X \cdot Y) \supset Z$
6. $(X \cdot A) \supset B$
7. $(X \cdot Y) \vee (X \cdot A)$
8. $[(X \cdot Y) \supset Z] \cdot [(X \cdot A) \supset B]$
9. $Z \vee B$
10. B

7. 1. $C \supset (D \supset \sim C)$
2. $C \equiv D \quad /\therefore \sim C \cdot \sim D$
3. $C \supset (\sim\sim C \supset \sim D)$
4. $C \supset (C \supset \sim D)$
5. $(C \cdot C) \supset \sim D$
6. $C \supset \sim D$
7. $\sim C \vee \sim D$
8. $\sim (C \cdot D)$
9. $(C \cdot D) \vee (\sim C \cdot \sim D)$
10. $\sim C \cdot \sim D$

8. 1. $E \cdot (F \vee G)$
2. $(E \cdot G) \supset \sim (H \vee I)$
3. $(\sim H \vee \sim I) \supset \sim (E \cdot F)$
$/\therefore H \equiv I$
4. $(E \cdot G) \supset (\sim H \cdot \sim I)$
5. $\sim (H \cdot I) \supset \sim (E \cdot F)$
6. $(E \cdot F) \supset (H \cdot I)$
7. $[(E \cdot F) \supset (H \cdot I)] \cdot [(E \cdot G) \supset (\sim H \cdot \sim I)]$
8. $(E \cdot F) \vee (E \cdot G)$
9. $(H \cdot I) \vee (\sim H \cdot \sim I)$
10. $H \equiv I$

9. 1. $J \vee (\sim K \vee J)$
2. $K \vee (\sim J \vee K) \quad /\therefore (J \cdot K) \vee (\sim J \cdot \sim K)$
3. $(\sim K \vee J) \vee J$
4. $\sim K \vee (J \vee J)$
5. $\sim K \vee J$
6. $K \supset J$
7. $(\sim J \vee K) \vee K$
8. $\sim J \vee (K \vee K)$
9. $\sim J \vee K$
10. $J \supset K$
11. $(J \supset K) \cdot (K \supset J)$
12. $J \equiv K$
13. $(J \cdot K) \vee (\sim J \cdot \sim K)$

10. 1. $(L \vee M) \vee (N \cdot O)$
2. $(\sim L \cdot O) \cdot \sim (\sim L \cdot M) \quad /\therefore \sim L \cdot N$
3. $\sim L \cdot [O \cdot \sim (\sim L \cdot M)]$
4. $\sim L$
5. $L \vee [M \vee (N \cdot O)]$
6. $M \vee (N \cdot O)$
7. $(M \vee N) \cdot (M \vee O)$
8. $M \vee N$
9. $\sim L \cdot (M \vee N)$
10. $(\sim L \cdot M) \vee (\sim L \cdot N)$
11. $\sim (\sim L \cdot M) \cdot (\sim L \cdot O)$
12. $\sim (\sim L \cdot M)$
13. $\sim L \cdot N$

III. **Construir una demostración formal de validez para cada uno de los argumentos siguientes:**

***1.** $\sim A$
$\therefore A \supset B$

2. C
$\therefore D \supset C$

3. $E \supset (F \supset G)$
$\therefore F \supset (E \supset G)$

4. $H \supset (I \cdot J)$
$\therefore H \supset I$

*5. $K \supset L$
$\therefore K \supset (L \vee M)$

6. $N \supset O$
$\therefore (N \cdot P) \supset O$

7. $(Q \vee R) \supset S$
$\therefore Q \supset S$

8. $T \supset \sim(U \supset V)$
$\therefore T \supset U$

9. $W \supset (X \cdot \sim Y)$
$\therefore W \supset (Y \supset X)$

*10. $A \supset \sim(B \supset C)$
$(D \cdot B) \supset C$
D
$\therefore \sim A$

11. $E \supset F$
$E \supset G$
$\therefore E \supset (F \cdot G)$

12. $H \supset (I \vee J)$
$\sim I$
$\therefore H \supset J$

13. $(K \vee L) \supset \sim(M \cdot N)$
$(\sim M \vee \sim N) \supset (O \equiv P)$
$(O \equiv P) \supset (Q \cdot R)$
$\therefore (L \vee K) \supset (R \cdot Q)$

14. $S \supset T$
$S \vee T$
$\therefore T$

*15. $(\sim U \vee V) \cdot (U \vee W)$
$\sim X \supset \sim W$
$\therefore V \vee X$

16. $A \supset (B \supset C)$
$C \supset (D \cdot E)$
$\therefore A \supset (B \supset D)$

17. $E \supset F$
$G \supset F$
$\therefore (E \vee G) \supset F$

18. $[(H \cdot I) \supset J] \cdot [\sim K \supset (I \cdot \sim J)]$
$\therefore H \supset K$

19. $[L \cdot (M \vee N)] \supset (M \cdot N)$
$\therefore L \supset (M \supset N)$

20. $O \supset (P \supset Q)$
$P \supset (Q \supset R)$
$\therefore O \supset (P \supset R)$

21. $(S \supset T) \cdot (U \supset V)$
$W \supset (S \vee U)$
$\therefore W \supset (T \vee V)$

IV. Construya una demostración formal de validez para cada uno de los siguientes argumentos, utilizando en cada caso la notación sugerida.

***1. Si estudio obtengo buenas calificaciones. Si no estudio me divierto. Por lo tanto, u obtengo buenas calificaciones, o me divierto. (*S*, *G*, *E*)**

2. Si el suministro de plata permanece constante y la utilización de plata aumenta entonces el precio de la plata se eleva. Si un aumento en el uso de la plata implica que se eleva el precio de la plata entonces lloverán especuladores. El suministro de plata permanece constante. Por lo tanto, lloverán especuladores. (*S*, *U*, *P*, *L*)

3. O Adams es elegido presidente o ambos Brown y Clark son elegidos consejeros. Si o Adams es elegido presidente o Brown es elegido consejero, entonces Davis presentará una protesta. Por lo tanto, o Clark es elegido consejero o Davis presentará una protesta. (*A*, *B*, *C*, *D*)

4. Si usa una buena carnada entonces si los peces están mordiendo entonces él pesca el límite legal. El usa una buena carnada, pero no pesca en el límite legal. Por lo tanto, los peces no muerden. (*B*, *M*, P)

*5. O el gobernador y el suplente del gobernador ambos intentan reelegirse, o la campaña primaria quedará despejada y el partido fragmentado por las disensiones. El gobernador no intentará reelegirse. Luego, el partido quedará fragmentado por las disensiones. (*G*, gobernador...; *L*, suplente...; *W*, quedará...; *T*, fragmentado...)

6. Si los Dodgers ganan el gallardete entonces ganarán la serie. Por lo tanto, si los Dodgers ganan el gallardete entonces si continúan pegando entonces ganarán la serie. (*G*, *S*, *P*)

7. Si él atrae el voto de los granjeros entonces se adjudicará las áreas rurales, y si atrae el voto de los trabajadores entonces se adjudicará los centros urbanos. Si se adjudica tanto las áreas rurales como los centros urbanos está seguro de su elección. No está seguro de su elección. Por lo tanto, o no atrae el voto de los granjeros o no atrae el voto de los trabajadores. (*G*, *R*, *T*, *U*, *S*)

8. O Argentina no se une a la alianza o Brasil la boicotea, pero si Argentina se une a la alianza entonces Chile la boicotea. Si Brasil boicotea la alianza entonces si Chile la boicotea entonces Ecuador la boicotea. Por lo tanto, si Argentina se une a la alianza entonces Ecuador la boicotea. (*A*, *B*, *C*, *E*)

9. Si Argentina se une a la alianza entonces tanto Brasil como Chile la boicotean. Si o Brasil o Chile boicotean la alianza entonces la alianza no será efectiva. Por lo tanto, si Argentina se une a la alianza entonces la alianza no será efectiva. (*A*, *B*, *C*, *E*)

*10. Esteban tomó o el autobús o el tren. Si tomó el autobús o condujo su propio automóvil entonces llegó tarde y se perdió la reunión. No llegó tarde. Por lo tanto, él tomó el tren. (*B*, autobús...; *T*, tren...; *C*, automóvil...; *L*, tarde...; *M*, perdió...)

11. Si te inscribes en el curso y estudias duro entonces pasarás, pero si te inscribes en el curso y no estudias duro entonces no pasarás. Por lo tanto, si te inscribes en el curso entonces o estudias duro y pasarás o no estudias duro y no pasarás. (*I*, *E*, *P*)

12. Si Argentina se incorpora a la alianza entonces o Brasil o Chile la boicotean. Si Brasil boicotea la alianza entonces Chile también la boicotea. Por lo tanto, si Argentina se une a la alianza entonces Chile la boicotea. (*A*, *B*, *C*)

13. Si o Argentina o Brasil se une a la alianza entonces o Chile o Ecuador la boicotean. Por lo tanto, si Argentina se une a la alianza entonces Chile la boicotea. (*A*, *B*, *C*, *E*)

14. Si los precios bajan o suben los salarios entonces las ventas al menudeo y las actividades publicitarias aumentan. Si las ventas al menudeo aumentan entonces los destajistas ganan más dinero. Pero los destajistas no ganan más dinero. Por lo tanto, los precios no bajan. (*P*, *S*, *M*, *A*, *D*)

*15. Si trabajo gano dinero, pero si estoy de ocioso gozo la vida. O trabajo o estoy de ocioso. Sin embargo, si trabajo no gozo la vida mientras que si estoy de ocioso no gano dinero. Por lo tanto, gozo la vida si y sólo si no gano dinero. (*W*, trabajo...; *M*, vida...; *I*, ocioso...; *E*, gozo...)

16. Si entra a la campaña primaria entonces si hace una campaña vigorosa entonces es nominado. Si gana la nominación y recibe el

apoyo del partido, entonces será elegido. Si toma en serio la plataforma del partido entonces recibirá el apoyo del partido, pero no será elegido. Por lo tanto, si participa en la campaña primaria entonces si hace una campaña vigorosa entonces no toma en serio la plataforma del partido. (*C*, *V*, *N*, *A*, *E*, *P*)

17. O rebajan la tarifa o las importaciones siguen disminuyendo y nuestras propias industrias prosperan. Si rebajan la tarifa entonces nuestras propias industrias prosperan. Por lo tanto, nuestras propias industrias prosperan. (*T*, *I*, *P*)
18. O hace reparar su automóvil o compra uno nuevo. Si hace reparar su automóvil deberá mucho dinero al taller de reparaciones. Si debe mucho dinero al taller tardará en salir de sus deudas. Si compra un auto nuevo debe entonces pedir un préstamo al banco, y si pide un préstamo al banco tardará en salir de sus deudas. O sale pronto de sus deudas o sus acreedores lo llevarán a la ruina. Por lo tanto, sus acreedores lo llevarán a la ruina. (*R*, *N*, *T*, *D*, *B*, *A*)
19. Si sale de día de campo viste ropa sport. Si viste ropa sport entonces no asiste a ambos, al banquete y a la fiesta. Si él no asiste al banquete conserva su boleto de entrada, pero él ya no tiene su boleto de entrada. El asiste a la fiesta. Por lo tanto, no sale de día de campo. (*C*, *S*, *B*, *F*, *E*)
20. Si estudia ciencias entonces se prepara para vivir desahogadamente, y si estudía humanidades entonces se prepara para vivir adecuadamente. Si él se prepara para vivir desahogadamente o se prepara para vivir adecuadamente entonces sus años de universidad están justificados. Pero sus años universitarios no están justificados. Por lo tanto, no estudia ni ciencias ni humanidades. (*C*, *D*, *H*, *A*, *U*)

*21. Si siembra tulipanes entonces su jardín florece temprano, y si siembra margaritas su jardín florece tarde. De modo que si siembra o tulipanes o margaritas su jardín florece tarde o temprano. (*T*, tulipanes...; *E*, temprano...; *A*, margaritas...; *L*, tarde...)

22. Si siembra tulipanes entonces su jardín florece temprano y si siembra margaritas entonces su jardín florece tarde. De modo que si siembra tulipanes y margaritas su jardín florece temprano y tarde. (*T*, *E*, *A*, *L*)
23. Si vamos a Europa entonces recorremos Escandinavia. Si vamos a Europa entonces si recorremos Escandinavia entonces visitamos Noruega. Si recorremos Escandinavia entonces si visitamos Noruega entonces haremos un viaje a los fiordos. Por lo tanto, si vamos a Europa haremos un viaje a los fiordos. (*E*, *S*, *N*, *F*)
24. Si Argentina se une a la Alianza entonces o Brasil o Chile la boicotea. Si Ecuador se une a la alianza entonces o Chile o Perú la boicotea. Chile no la boicotea. Por lo tanto, si ni Brasil ni Perú la boicotean entonces ni Argentina ni Ecuador se unen a la alianza. (*A*, *B*, *C*, *E*, P)
25. Si o Argentina o Brasil se incorpora a la alianza entonces si o Chile o Ecuador la boicotea entonces, aunque Perú no la boicotee Venezuela la boicotea. Si o Perú o Nicaragua no la boicotea entonces Uruguay se incorpora a la alianza. Por lo tanto, si Argentina se incorpora a la alianza entonces si Chile la boicotea entonces Uruguay se incorpora a la Alianza. (*A*, *B*, *C*, *E*, P, *V*, *N*, *U*)

3.3. Demostración de la Invalidez

Podemos establecer la invalidez de un argumento usando una tabla de verdad para mostrar que la forma específica del argumento es inválida. La tabla de verdad demuestra la invalidez si contiene por lo menos un renglón en el que se asignan valores de verdad a las variables sentenciales de modo tal que las premisas se hacen verdaderas y la conclusión falsa. Si podemos encontrar una asignación semejante de valores de verdad sin construir toda la tabla, tendremos un método más breve de demostración de invalidez.

Consideremos el argumento inválido

Si el senador vota en contra de este proyecto de ley entonces se opone a penas más severas contra los evasores de impuestos.
Si el senador es, él mismo, un evasor de impuestos entonces se opone a penas más severas contra los evasores de impuestos.
Por lo tanto, si el senador vota en contra de este proyecto de ley él mismo es un evasor de impuestos.

el cual puede simbolizarse como

$$V \supset O$$
$$H \supset O$$
$$\therefore V \supset H$$

En lugar de construir una tabla de verdad para la forma específica de este argumento, podemos demostrar su invalidez asignando valores de verdad a los enunciados componentes simples V, O y H* de modo que las premisas sean verdaderas y la conclusión falsa. La conclusión se hace falsa al dar el valor **T** a V y **F** a H; y ambas premisas verdaderas asignando **T** a O. Este método de demostrar invalidez está íntimamente relacionado con el método de la tabla de verdad. En efecto, asignar los valores como se indicó viene a ser el de describir un renglón pertinente de la tabla de verdad —un renglón que basta para establecer la invalidez del argumento puesto a prueba—. La relación aparece más clara, tal vez, cuando las asignaciones de valores de verdad se escriben horizontalmente, como

V	O	H	$V \supset O$	$H \supset O$	$V \supset H$
T	**T**	**F**	**T**	**T**	**F**

Este nuevo método de demostración de invalidez es más breve que una escritura completa de la tabla de verdad, y el tiempo y trabajo economizados son proporcionalmente mayores para argumentos más complicados. Al demostrar la invalidez de argumentos más extensos, puede ser necesaria cierta cantidad de prueba y error

* V, vota . . .; O, se opone . . .; H, él mismo . . . (N. del T.)

para descubrir una asignación de valores de verdad que resulte. Pero aun siendo así, este método es más rápido y fácil que escribir la tabla de verdad completa. Es obvio que el método presente será suficiente para demostrar la invalidez de cualquier argumento cuya invalidez puede mostrarse mediante una tabla de verdad.

EJERCICIOS

Demostrar la invalidez de los siguientes argumentos por la asignación de valores de verdad:

*1. $A \supset B$
$C \supset D$
$B \vee C$
$\therefore A \vee D$

2. $E \supset (F \vee G)$
$G \supset (H \cdot I)$
$\sim H$
$\therefore E \supset I$

3. $J \supset (K \supset L)$
$K \supset (\sim L \supset M)$
$(L \vee M) \supset N$
$\therefore J \supset N$

4. $(O \vee P) \supset Q$
$Q \supset (P \vee R)$
$O \supset (\sim S \supset P)$
$(S \supset O) \supset \sim R$
$\therefore P \equiv Q$

*5. $T \equiv U$
$U \equiv (V \cdot W)$
$V \equiv (T \vee X)$
$T \vee X$
$\therefore T \cdot X$

6. $X \equiv (Y \supset Z)$
$Y \equiv (\sim X \cdot \sim Z)$
$Z \equiv (X \vee \sim Y)$
Y
$\therefore X \vee Z$

7. $(A \supset B) \cdot (C \supset D)$
$A \vee C$
$(B \vee D) \supset (E \cdot F)$
$E \supset (F \supset G)$
$G \supset (A \supset H)$
$\therefore H$

8. $I \vee (J \cdot K)$
$(I \vee J) \supset (L \equiv \sim M)$
$(L \supset \sim M) \supset (M \cdot \sim N)$
$(N \supset O) \cdot (O \supset M)$
$(J \supset K) \supset O$
$\therefore O$

9. $P \equiv (Q \equiv \sim R)$
$Q \supset (\sim R \vee \sim S)$
$[R \supset (Q \vee \sim T)] \cdot (P \supset Q)$
$[U \supset (S \cdot T)] \cdot (T \supset \sim V)$
$[(Q \cdot R) \supset \sim U] \cdot [U \supset (Q \vee R)]$
$(Q \vee V) \cdot \sim V$
$\therefore \sim U \cdot \sim V$

10. $W \equiv (X \vee Y)$
$X \equiv (Z \supset Y)$
$Y \equiv (Z \equiv \sim A)$
$Z \equiv (A \supset B)$
$A \equiv (B \equiv Z)$
$B \vee \sim W$
$\therefore W \equiv B$

3.4. No Completud* de las Diecinueve Reglas[2]

Las diecinueve Reglas de Inferencia presentadas hasta el momento son *incompletas*, lo que quiere decir que hay argumentos válidos función de verdad cuya validez no es demostrable usando

* *Compleción*, según el D.R.A.L.E. (N. del T.)

[2] Esta demostración de no completud me fue comunicada por mi amigo el Profesor Leo Simons de la Universidad de Cincinnati.

tan sólo esas diecinueve Reglas. Para discutir y establecer esta propiedad de no completud es útil introducir la noción de una característica que es "hereditaria con respecto a un conjunto de Reglas de Inferencia". Proponemos esta definición: una característica Φ *es hereditaria con respecto a un conjunto de Reglas de Inferencia* si y sólo si siempre que Φ pertenezca a uno o más enunciados también pertenecerá a todo enunciado deducido de ellos por medio de esas Reglas de Inferencia. Por ejemplo, *verdad* es una característica que es hereditaria con respecto a las diecinueve Reglas de Inferencia presentadas en las dos primeras secciones de este capítulo. Como se observó anteriormente, cualquier conclusión debe ser verdadera si puede deducirse de premisas verdaderas por medio de nuestras diecinueve Reglas de Inferencia. De hecho, no desearíamos usar Reglas de Inferencia con respecto a las cuales la verdad *no* fuera hereditaria.

Ahora bien, para demostrar que un conjunto de Reglas de Inferencia es incompleto, debemos encontrar una característica Φ y un argumento válido α tales que

(1) Φ sea hereditaria con respecto al conjunto de Reglas de Inferencia; y
(2) Φ pertenezca a las premisas de α, pero no a la conclusión de α.

La característica *verdad* es hereditaria con respecto a cualquier conjunto de Reglas de Inferencia en el que nos interesemos seriamente y, por lo tanto, satisface la condición (1) anterior. Pero si α es un argumento válido, de nuestra definición de validez se sigue inmediatamente que la *verdad* no puede nunca satisfacer la condición (2) anterior. Por lo tanto, para demostrar la no completud de nuestras diecinueve Reglas de Inferencia debemos encontrar una característica diferente de *verdad* que sea hereditaria con respecto a nuestras diecinueve Reglas, y pueda pertenecer a las premisas, pero no a la conclusión de algún argumento válido α.

Para obtener una característica tal se introduce un modelo de tres elementos en términos del cual los símbolos en nuestras diecinueve Reglas puedan ser interpretados. Los tres elementos son los números **0**, **1** y **2** que tienen papeles análogos a los que desempeñan los valores de verdad verdadero (**T**) y falso (**F**) introducidos en el Cap. 2. Todo enunciado tendrá uno de los tres elementos del modelo asignado a él, y se dirá que toma o tiene uno de los tres *valores* **0**, **1** o **2**. Tal como en el Cap. 2 las variables sentenciales $p, q, r, \ldots$ se permitía que tomaran los valores **T** y **F**, así aquí permitimos que $p, q, r, \ldots$ tomen los valores **0**, **1** y **2**.

Los cinco símbolos "$\sim$", "$\cdot$", "v", "$\supset$" y "$\equiv$" que ocurren en nuestras diecinueve Reglas pueden volverse a definir para (o en términos de) nuestro modelo de tres elementos mediante las siguientes tablas a tres valores:

p	$\sim p$
0	2
1	1
2	0

p	q	$p \cdot q$	$p \vee q$	$p \supset q$	$p \equiv q$
0	0	0	0	0	0
0	1	1	0	1	1
0	2	2	0	2	2
1	0	1	0	0	1
1	1	1	1	1	1
1	2	2	1	1	1
2	0	2	0	0	2
2	1	2	1	0	1
2	2	2	2	0	0

Pueden darse definiciones analíticas alternativas (pero equivalentes), como sigue, en donde "mín(x, y)" denota el mínimo de los números x y y "máx(x, y)" denota el máximo de los números x y y.

$$\begin{aligned} \sim p &= 2 - p \\ p \cdot q &= \text{máx}(p, q) \\ p \vee q &= \text{mín}(p, q) \\ p \supset q &= \text{mín}(2 - p, q) \\ p \equiv q &= \text{máx}(\text{mín}(2 - p, q), \text{mín}(2 - q, p)) \end{aligned}$$

La característica deseada Φ que es hereditaria con respecto a nuestras diecinueve Reglas de Inferencia es la característica de tener el valor 0. Para demostrar que es hereditaria con respecto a las diecinueve Reglas será suficiente demostrar que es hereditaria con respecto a cada una de las diecinueve Reglas. Esto puede mostrarse para cada regla por medio de una tabla a tres valores. Por ejemplo, que tener el valor 0 es característica hereditaria con respecto a *Modus Ponens* puede verse examinando la tabla anterior que define el valor de "$p \supset q$" como una función del valor de "p" y de "q". Las dos premisas "p" y "$p \supset q$" tienen el valor 0 solamente en el primer renglón, y ahí la conclusión "q" tiene el valor 0 también. Examinando la misma tabla se ve que tener el valor 0 es hereditario también para la Simplificación, la Conjunción y la Adición. Llenando las columnas adicionales de "$\sim p$" y "$\sim q$" se mostrará que tener el valor 0 es hereditario respecto a *Modus Tollens* y también al Silogismo Disyuntivo. Que es hereditario con respecto al Silogismo Hipotético puede mostrarse mediante la tabla siguiente:

p	q	r	$p \supset q$	$q \supset r$	$p \supset r$
0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	1	1
0	0	2	0	2	2
0	1	0	1	0	0
0	1	1	1	1	1
0	1	2	1	1	2
0	2	0	2	0	0
0	2	1	2	0	1
0	2	2	2	0	2
1	0	0	0	0	0
1	0	1	0	1	1
1	0	2	0	2	1
1	1	0	1	0	0
1	1	1	1	1	1
1	1	2	1	1	1
1	2	0	1	0	0
1	2	1	1	0	1
1	2	2	1	0	1
2	0	0	0	0	0
2	0	1	0	1	0
2	0	2	0	2	0
2	1	0	0	0	0
2	1	1	0	1	0
2	1	2	0	1	0
2	2	0	0	0	0
2	2	1	0	0	0
2	2	2	0	0	0

Solamente en los renglones primero, décimo, decimonono, vigesimosegundo, vigesimoquinto, vigesimosexto y vigesimoséptimo tienen el valor 0 las premisas "$p \supset q$" y "$q \supset r$", y en cada uno de ellos la conclusión "$p \supset r$" tiene también el valor 0. Serán necesarias tablas aún más grandes para mostrar que tener el valor 0 es hereditario con respecto al Dilema Constructivo y al Dilema Destructivo pero es fácil hacerlas. (Sin embargo, no es absolutamente necesario construir esas tablas, porque las definiciones analíticas alternativas de la página anterior pueden usarse para mostrar que tener el valor 0 es hereditario con respecto a los dilemas, como se hace más adelante.)

Al construir tablas a tres valores para verificar que tener el valor 0 es hereditario con respecto al reemplazo de enunciados por sus equivalentes lógicos, notamos que aunque los bicondicionales mismos no necesitan tener el valor **0**, las expresiones que flanquean el signo de equivalencia necesariamente tienen el mismo valor. Por ejemplo, en la tabla apropiada al primero de los Teoremas de De Morgan,

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$p \cdot q$	$\sim(p \cdot q)$	$\sim p \vee \sim q$	$\sim(p \cdot q) \equiv (\sim p \vee \sim q)$
0	**0**	**2**	**2**	**0**	**2**	**2**	**0**
0	**1**	**2**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**
0	**2**	**2**	**0**	**2**	**0**	**0**	**0**
1	**0**	**1**	**2**	**1**	**1**	**1**	**1**
1	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**
1	**2**	**1**	**0**	**2**	**0**	**0**	**0**
2	**0**	**0**	**2**	**2**	**0**	**0**	**0**
2	**1**	**0**	**1**	**2**	**0**	**0**	**0**
2	**2**	**0**	**0**	**2**	**0**	**0**	**0**

las expresiones equivalentes "$\sim(p \cdot q)$" y "$\sim p \vee \sim q$" tienen el mismo valor en cada renglón aunque el enunciado de su equivalencia no tiene el valor **0** en los renglones dos, cuatro y cinco. Debe ser obvio, sin embargo, que tener el valor **0** es hereditario con respecto al reemplazo de todo o parte de un enunciado cualquiera por cualquier otro enunciado equivalente a la parte reemplazada.

Hay demostraciones alternativas de que tener el valor **0** es hereditario con respecto a las diecinueve Reglas, que hacen uso de nuestras definiciones analíticas de los símbolos lógicos. Por ejemplo, que tener el valor **0** es hereditario con respecto al Dilema Constructivo puede mostrarlo el siguiente argumento. Por hipótesis "$(p \supset q) \cdot (r \supset s)$" y "$p \vee r$" tienen ambos el valor **0**. Luego ambos "$p \supset q$" y "$r \supset s$" tienen el valor **0**, luego o $p = 2$ o $q = \mathbf{0}$ y o $r = 2$ o $s = \mathbf{0}$. Dado que "$p \vee r$" tiene el valor **0**, o $p = \mathbf{0}$ o $r = \mathbf{0}$. Si $p = \mathbf{0}$ entonces $p \neq \mathbf{2}$ de donde $q = \mathbf{0}$, y si $r = \mathbf{0}$ entonces $r \neq \mathbf{2}$, de donde $s = \mathbf{0}$; por lo tanto, o $q = \mathbf{0}$ o $s = \mathbf{0}$ de donde "$q \vee s$" tiene el valor **0**, que es lo que había que mostrar.

Una vez que se ha mostrado que la característica de tener el valor **0** es hereditaria con respecto a las diecinueve Reglas, para demostrar la no completud de esas reglas sólo hace falta exhibir un argumento válido cuyas premisas tengan el valor **0** y cuya conclusión no tenga el valor **0**. Un argumento tal es

$$A \supset B$$
$$\therefore A \supset (A \cdot B)$$

cuya validez fácilmente se establece por una tabla de verdad. En el caso que "A" tenga el valor **1** y "B" tenga el valor **0**, la premisa "$A \supset B$" tiene el valor **0**, pero la conclusión "$A \supset (A \cdot B)$" tiene el valor 1. Por lo tanto, las diecinueve Reglas de Inferencia presentadas hasta ahora son incompletas.

3.5. La Regla de Demostración Condicional

A continuación introducimos una nueva regla para usarla en el método de deducción: la regla de Demostración Condicional. En esta sección la nueva regla se aplicará tan sólo a argumentos cuyas conclusiones son enunciados condicionales. La nueva regla puede aplicarse y justificarse mejor con referencia al principio de Exportación y la correspondencia, señalada en el Cap. 2, entre formas de argumento válidas y tautologías.

A todo argumento le corresponde un enunciado condicional cuyo antecedente es la conjunción de las premisas del argumento y cuyo consecuente es la conclusión del argumento. Como se ha señalado, un argumento es válido si y sólo si su correspondiente condicional es una tautología. Si un argumento tiene un enunciado condicional como conclusión, que podemos simbolizar $A \supset C$, entonces si simbolizamos la conjunción de sus premisas como P, el argumento es válido si y sólo si el condicional

$$P \supset (A \supset C) \tag{1}$$

es una tautología. Si podemos deducir la conclusión $A \supset C$ de las premisas conjuntas en P por una secuencia de argumentos válidos elementales, habremos así demostrado la validez del argumento y que el condicional asociado (1) es una tautología. Por el principio de Exportación, (1) es lógicamente equivalente a

$$(P \cdot A) \supset C \tag{2}$$

Pero (2) es el condicional asociado con un argumento un tanto diferente. Este segundo argumento tiene como premisas todas las premisas del primer argumento, *además* de una premisa adicional que es el antecedente de la conclusión del primer argumento. Y la conclusión del segundo argumento es el consecuente de la conclusión del primer argumento. Ahora bien, si deducimos la conclusión del segundo argumento, C, de las premisas conjuntas en $P \cdot A$ por una sucesión de argumentos válidos elementales, habremos demostrado que su enunciado condicional asociado (2) es una tautología. Pero como (1) y (2) son lógicamente equivalentes esto demuestra que (1) es una tautología también, de donde se sigue que el argumento original con una premisa menos y la conclusión condicional $A \supset C$, también es válido. Ahora, la regla de Demostración Condicional no permite inferir la validez de cualquier argumento

$$\begin{array}{l} P \\ \therefore A \supset C \end{array}$$

de una demostración formal de validez para el argumento

$$\begin{array}{l} P \\ A \\ \therefore C \end{array}$$

Dado cualquier argumento cuya conclusión es un enunciado condicional, una demostración de su validez usando la regla de Demostración Condicional, es decir, una demostración condicional de su validez, se construye suponiendo que el antecedente de su conclusión es una premisa adicional y luego deduciendo el consecuente de su conclusión por una sucesión de argumentos válidos elementales. Así, una demostración condicional de validez para el argumento

$$\begin{array}{l} (A \lor B) \supset (C \cdot D) \\ (D \lor E) \supset F \\ \therefore A \supset F \end{array}$$

puede escribirse como

1.	$(A \lor B) \supset (C \cdot D)$	
2.	$(D \lor E) \supset F$	$/ \therefore A \supset F$
3.	A	$/ \therefore F$ (C.P.)
4.	$A \lor B$	3, Ad.
5.	$C \cdot D$	1, 4, M.P.
6.	$D \cdot C$	5, Conm.
7.	D	6, Simp.
8.	$D \lor E$	7, Ad.
9.	F	2, 8, M.P.

Aquí la diagonal de separación, así como el símbolo "por lo tanto" de los tres puntos, y el "C.P." entre paréntesis, indican que se está usando la regla de la Demostración Condicional.

Dado que la regla de Demostración Condicional puede usarse al tratar cualquier argumento válido con un enunciado condicional como conclusión, puede aplicársele más de una vez en el curso de una misma deducción. Así, una demostración condicional de validez para

$$\begin{array}{l} A \supset (B \supset C) \\ B \supset (C \supset D) \\ \therefore A \supset (B \supset D) \end{array}$$

será una demostración de validez para

$$\begin{array}{l} A \supset (B \supset C) \\ B \supset (C \supset D) \\ A \\ \therefore B \supset D \end{array}$$

y como el último tiene una conclusión condicional, se le puede dar una demostración condicional demostrando la validez de

$$\begin{array}{l} A \supset (B \supset C) \\ B \supset (C \supset D) \\ A \\ B \\ \therefore D \end{array}$$

Cada uso del método condicional debiera ser señalado con una diagonal adicional y un signo "por lo tanto", además de la notación "(C.P.)". La demostración sugerida se escribiría:

1.	$A \supset (B \supset C)$		
2.	$B \supset (C \supset D)$	$/\therefore A \supset (B \supset D)$	
3.	A	$/\therefore B \supset D$	(C.P.)
4.	B	$/\therefore D$	(C.P.)
5.	$B \supset C$	1, 3, M.P.	
6.	C	5, 4, M.P.	
7.	$C \supset D$	2, 4, M.P.	
8.	D	7, 6, M.P.	

La regla de Demostración Condicional es una genuina contribución a las herramientas de demostración de las Secs. 3.1 y 3.2. No solamente permite construir demostraciones *más breves* de la validez de los argumentos, validez que podría demostrarse haciendo llamado a las diecinueve Reglas de Inferencia exclusivamente, sino que también nos permite establecer la validez de argumentos válidos cuya validez no podría demostrarse con referencia a la lista original sola. Por ejemplo, en la Sec. 3.4 se demostró que el argumento obviamente válido

$$\begin{array}{l} A \supset B \\ \therefore A \supset (A \cdot B) \end{array}$$

no se puede demostrar utilizando la lista original de diecinueve Reglas tan sólo. Pero se le demuestra fácilmente usando, además, la regla de Demostración Condicional. Su demostración condicional de validez es

1.	$A \supset B$	$/\therefore A \supset (A \cdot B)$	
2.	A	$/\therefore A \cdot B$	(C.P.)
3.	B	1, 2, M.P.	
4.	$A \cdot B$	2, 3, Conj.	

EJERCICIOS

Dar demostraciones condicionales de validez para los Ejercicios *21, 22, 23, 24 y 25 de la Pág. 65.

3.6. La Regla de Demostración Indirecta

El método de *demostración indirecta,* a menudo llamado método de demostración por *reducción al absurdo,* es familiar para todos los que hayan estudiado la geometría elemental. Al deducir sus teoremas, Euclides suele empezar suponiendo lo opuesto de lo que se propone demostrar. Si este supuesto conduce a una contradicción o "se reduce a un absurdo" entonces el supuesto debe ser falso, y su negación —el teorema que se desea demostrar— debe ser verdadera.

Una demostración indirecta de validez para un argumento dado se construye suponiendo, como premisa adicional, la negación de su conclusión y deduciendo entonces una contradicción explícita del conjunto aumentado de las premisas. Así, una demostración indirecta de validez para el argumento

$$A \supset (B \cdot C)$$
$$(B \vee D) \supset E$$
$$D \vee A$$
$$\therefore E$$

puede escribirse como a continuación:

1.	$A \supset (B \cdot C)$	
2.	$(B \vee D) \supset E$	
3.	$D \vee A$	$/ \therefore E$
4.	$\sim E$	I.P. (Demostración Indirecta)
5.	$\sim(B \vee D)$	2, 4, M.T.
6.	$\sim B \cdot \sim D$	5, De M.
7.	$\sim D \cdot \sim B$	6, Conm.
8.	$\sim D$	7, Simp.
9.	A	3, 8, D.S.
10.	$B \cdot C$	1, 9, M.P.
11.	B	10, Simp.
12.	$\sim B$	6, Simp.
13.	$B \cdot \sim B$	11, 12, Conj.

El renglón 13 es una contradicción explícita, luego, la demostración es completa, pues la validez del argumento original se sigue por la regla de Demostración Indirecta.

Es fácil demostrar que de una contradicción es posible deducir válidamente cualquier conclusión. En otras palabras, cualquier argumento de la forma

$$\begin{array}{l} p \\ \sim p \\ \therefore q \end{array}$$

es válido, sin importar los enunciados que se sustituyan por las variables p, q. Así, de los renglones 11 y 12 de la demostración anterior es posible deducir la conclusión E en solamente dos renglones más. Esta continuación procedería:

14.	$B \vee E$	11, Ad.
15.	E	14, 12, D.S.

Luego, es posible considerar una demostración indirecta de validez de un argumento dado, no como la deducción de su invalidez del *hecho que* se obtuvo una contradicción, sino deduciendo la conclusión de ese argumento *a partir de la contradicción misma*. Así, en vez de considerar una *reducción al absurdo* como un proceder *hacia* la contradicción, podemos verla como un *pasar por* la contradicción hacia la conclusión del argumento original. Simbolizando la conjunción de las premisas de un argumento como P y su conclusión como C, entonces una demostración indirecta de validez de

$$\begin{array}{l} P \\ \therefore C \end{array}$$

la proporcionará una demostración formal de validez del argumento

$$\begin{array}{l} P \\ \sim C \\ \therefore C \end{array}$$

¿Qué conexión existe entre los dos argumentos

$$\begin{array}{l} P \\ \therefore C \end{array} \quad \text{y} \quad \begin{array}{l} P \\ \sim C \\ \therefore C \end{array}$$

que hace que demostrar el segundo como válido basta para establecer la validez del primero? Una demostración formal de validez para el último constituye una demostración condicional de validez para un tercer argumento

$$\begin{array}{l} P \\ \therefore \sim C \supset C \end{array}$$

Pero la conclusión de este tercer argumento es lógicamente equivalente a la conclusión del primero. Por la definición de la implicación material, $\sim C \supset C$ es lógicamente equivalente a $\sim\sim C \vee C$ que es lógicamente equivalente a $C \vee C$ por el principio de la Doble Negación. Y $C \vee C$ y C son lógicamente equivalentes por el principio de Tautología. Como los argumentos primero y tercero tienen premisas idénticas y conclusiones lógicamente equivalentes, toda prueba de validez para uno es una demostración de validez para el otro. Una demostración de validez para el segundo argumento es una demostración condicional del tercero a la vez que una demostración indirecta del primero. Luego, vemos que hay una relación íntima entre el método condicional y el método indirecto de demostración, esto es, entre la regla de Demostración Condicional y la regla de Demostración Indirecta.

Al agregar la regla de Demostración Indirecta refuerza todavía más nuestra herramienta de demostración. Todo argumento cuya conclusión sea una tautología puede demostrarse válido independientemente de cuáles sean sus premisas por el método de las tablas de verdad. Pero si la conclusión tautológica de un argumento no es un enunciado condicional y las premisas son consistentes entre sí y completamente ajenas a la conclusión, entonces el argumento no puede demostrarse válido por el método de deducción sin hacer uso de la regla de Demostración Indirecta. Aunque el argumento

$$A$$
$$\therefore B \vee (B \supset C)$$

no puede demostrarse válido por los medios presentados en las secciones precedentes, su validez fácilmente se establece por medio de la regla de Demostración Indirecta. Nuestra demostración de su validez es:

1.	A	$/\therefore B \vee (B \supset C)$
2.	$\sim[B \vee (B \supset C)]$	I.P.
3.	$\sim[B \vee (\sim B \vee C)]$	2, Impl.
4.	$\sim[(B \vee \sim B) \vee C]$	3, Asoc.
5.	$\sim(B \vee \sim B) \cdot \sim C$	4, De M.
6.	$\sim(B \vee \sim B)$	5, Simp.
7.	$\sim B \cdot \sim\sim B$	6, De M.

Nuestras diecinueve Reglas de Inferencia, junto con las reglas de Demostración Condicional e Indirecta, nos proporcionan un método de deducción que es completo. Cualquier argumento cuya validez pueda establecerse por medio de tablas de verdad puede demostrarse válido por el método de deducción presentado en las Secs. 3.1, 3.2, 3.5 y 3.6. Sin embargo, esto será demostrado hasta el final del Cap. 7.

EJERCICIOS

Para cada uno de los siguientes argumentos construya una demostración formal de validez y una demostración indirecta y compare las longitudes de una y otra:

1. $A \vee (B \cdot C)$
   $A \supset C$
   $\therefore C$

2. $(D \vee E) \supset (F \supset G)$
   $(\sim G \vee H) \supset (D \cdot F)$
   $\therefore G$

*3. $(H \supset I) \cdot (J \supset K)$
   $(I \vee K) \supset L$
   $\sim L$
   $\therefore \sim (H \vee J)$

4. $(M \vee N) \supset (O \cdot P)$
   $(O \vee Q) \supset (\sim R \cdot S)$
   $(R \vee T) \supset (M \cdot U)$
   $\therefore \sim R$

*5. $(V \supset \sim W) \cdot (X \supset Y)$
   $(\sim W \supset Z) \cdot (Y \supset \sim A)$
   $(Z \supset \sim B) \cdot (\sim A \supset C)$
   $V \cdot X$
   $\therefore \sim B \cdot C$

3.7. Demostración de Tautologías

Lós métodos de demostración de validez condicional e indirecta, pueden usarse no sólo para establecer la validez de argumentos, sino también para demostrar que ciertos enunciados y formas sentenciales son tautologías. Todo enunciado condicional corresponde, en cierto sentido, a un argumento cuya única premisa es el antecedente del condicional y cuya conclusión es el consecuente del condicional. El condicional es una tautología si y sólo si ese argumento es válido. Luego, un condicional se demuestra que es tautológico deduciendo su consecuente de su antecedente por medio de una secuencia de argumentos válidos elementales. Así, el enunciado $(A \cdot B) \supset A$ se demuestra que es tautológico por la misma secuencia de renglones que demuestra la validez del argumento

$$A \cdot B$$
$$\therefore A$$

Se ha dicho antes que el método condicional puede usarse repetidamente en una demostración. Así, el enunciado condicional.

$$(Q \supset R) \supset [(P \supset Q) \supset (P \supset R)]$$

se demuestra tautológico como sigue:

1.	$Q \supset R$	$/\therefore (P \supset Q) \supset (P \supset R)$	(C.P.)
2.	$P \supset Q$	$/\therefore P \supset R$	(C.P.)
3.	$P \supset R$	2, 1, H.S.	

Para ciertos enunciados condicionales complicados, este método de demostración de ser tautológicos es más corto y más fácil que la construcción de tablas de verdad.

Hay muchas tautologías que no son de forma condicional y a éstas no es aplicable el método precedente. Pero toda tautología puede establecerse como tal por el método de demostración indirecta. Aplicado a un *argumento,* el método indirecto de demostración de validez, éste procede agregando la negación de su conclusión a las premisas del argumento, y luego deduciendo una contradicción por una secuencia de argumentos válidos elementales. Aplicado a un *enunciado,* el método indirecto para demostrar que es una tautología consiste en tomar su negación como premisa y luego deducir una contradicción explícita por una secuencia de argumentos válidos elementales. Así, el enunciado $B \vee \sim B$ se demuestra tautológico como sigue:

1. $\sim(B \vee \sim B)$ $/ \therefore B \vee \sim B$ (I.P.)
2. $\sim B \cdot \sim\sim B$ 1, De M.

Decir que un enunciado es una tautología es afirmar que su verdad es incondicional, de modo que puede establecerse sin recurrir a ningún otro enunciado como premisa. Otra forma de decirlo, tal vez no muy susceptible de interpretarse mal, es afirmar la validez del "argumento" que tiene al enunciado en cuestión como "conclusión", pero no tiene premisas. Si la "conclusión" *es* una tautología, entonces el método de deducción nos permite demostrar que el "argumento" es válido aunque carece de premisas—usando ya sea la regla de Demostración Condicional o la regla de Demostración Indirecta—. Toda tautología puede establecerse por el método de deducción, aunque esta afirmación no será demostrada sino hasta el final del Cap. 7.

EJERCICIOS

I. **Verifique las siguientes tautologías por el método de demostración condicional:**

*1. $P \supset (Q \supset P)$
2. $[P \supset (Q \supset R)] \supset [(P \supset Q) \supset (P \supset R)]$
3. $[P \supset (Q \supset R)] \supset [Q \supset (P \supset R)]$
4. $(P \supset Q) \supset (\sim Q \supset \sim P)$
*5. $\sim\sim P \supset P$
6. $P \supset \sim\sim P$
7. $(A \supset B) \supset [(B \supset C) \supset (A \supset C)]$

8. $[(A \supset B)\cdot(A \supset C)] \supset [A \supset (B \vee C)]$
9. $[(A \supset B)\cdot(A \supset C)] \supset [A \supset (B\cdot C)]$
*10. $(A \supset B) \supset [A \supset (A\cdot B)]$
11. $(A \supset B) \supset [(\sim A \supset B) \supset B]$
12. $(A \supset B) \supset [(A\cdot C) \supset (B\cdot C)]$
13. $[(A \supset B) \supset B] \supset (A \vee B)$
14. $(B \supset C) \supset [(A \vee B) \supset (C \vee A)]$
*15. $[A \supset (B\cdot C)] \supset \{[B \supset (D\cdot E)] \supset (A \supset D)\}$
16. $[(A \vee B) \supset C] \supset \{[(C \vee D) \supset E] \supset (A \supset E)\}$
17. $[(A \supset B) \supset A] \supset A$
18. $P \supset (P\cdot P)$
19. $(P\cdot Q) \supset P$
20. $(P \supset Q) \supset [\sim(Q\cdot R) \supset \sim(R\cdot P)]$

II. Con el método de demostración indirecta verifique que las siguientes son tautologías:

*1. $(A \supset B) \vee (A \supset \sim B)$
2. $(A \supset B) \vee (\sim A \supset B)$
3. $(A \supset B) \vee (B \supset A)$
4. $(A \supset B) \vee (B \supset C)$
*5. $(A \supset B) \vee (\sim A \supset C)$
6. $A \vee (A \supset B)$
7. $P \equiv \sim\sim P$
8. $A \equiv [A\cdot(A \vee B)]$
9. $A \equiv [A \vee (A\cdot B)]$
10. $\sim[(A \supset \sim A)\cdot(\sim A \supset A)]$

3.8. La Regla de Demostración Condicional Reforzada

En las secciones precedentes se aplicó el método de Demostración Condicional solamente a los argumentos que tuvieran conclusiones en forma condicional. Pero en el capítulo siguiente será conveniente usar algo como el método de Demostración Condicional para argumentos cuyas conclusiones no son enunciados condicionales explícitos. Para lograr este propósito reforzamos nuestra regla de Demostración Condicional dándole así una más amplia aplicabilidad.

Para formular nuestra regla de Demostración Condicional reforzada es útil adoptar un nuevo método de escritura de las demostraciones que utilizan el Método Condicional. Como se explicó en la Sec. 3.5, hemos usado el método de Demostración Condicional para establecer la validez de un argumento que tuviese un condicional como conclusión, agregando el antecedente de ese condicional a las premisas del argumento como un supuesto, y luego deduciendo el consecuente del condicional. La notación en la Sec. 3.5 involucraba el uso de una línea diagonal y un signo *por lo tanto* extra, como al demostrar la validez del argumento

$$A \supset B$$
$$\therefore A \supset (A \cdot B)$$

por la siguiente demostración de cuatro renglones:

1. $A \supset B$ $/\therefore A \supset (A \cdot B)$
2. A $/\therefore A \cdot B$ (C.P.)
3. B 1, 2, M.P.
4. $A \cdot B$ 2, 3, Conj.

Los siguientes cinco renglones constituyen una Demostración Condicional de validez para el mismo argumento en la nueva notación:

1. $A \supset B$ $/\therefore A \supset (A \cdot B)$
2. A supuesto
3. B 1, 2, M.P.
4. $A \cdot B$ 2, 3, Conj.
5. $A \supset (A \cdot B)$ 2–4, C.P.

Aquí el quinto renglón se infiere, no de uno ni de dos de los renglones precedentes, sino de la *secuencia* de los renglones 2, 3 y 4, que constituyen una deducción válida del renglón 4 a partir de los renglones 1 y 2. En el renglón 5 inferimos la validez del argumento

$$A \supset B$$
$$\therefore A \supset (A \cdot B)$$

a partir de la validez demostrada del argumento

$$A \supset B$$
$$A$$
$$\therefore A \cdot B$$

Esa inferencia "se justifica" notando la secuencia de renglones a los que se recurre, y usando las letras "C.P." para mostrar que se está usando el principio de Demostración Condicional.

En la segunda de las demostraciones precedentes, en el renglón 2 —la hipótesis— tiene a los renglones 3 y 4 como dependientes. El renglón 5, sin embargo, *no* depende del renglón 2, sino solamente del renglón 1. El renglón 5 está, por lo tanto, *fuera* o *fuera del alcance* del supuesto que se hace como renglón 2. Cuando se hace un supuesto en una Demostración Condicional de validez, siempre se *limita* su "alcance", nunca extendiéndolo hasta el último renglón de la demostración.

Ahora se introduce una notación que es muy útil para seguir la pista de los supuestos y de sus *alcances*. Con este propósito se usa una flecha doblada, cuya punta se encuentra a la izquierda del supuesto y cuya línea se hace correr a todo lo largo de los renglones que están dentro del alcance del supuesto doblando la línea hacia dentro para indicar el final del alcance de ese supuesto. El alcance del supuesto de la demostración precedente se indica entonces como sigue:

1.	$A \supset B$	$/ \therefore A \supset (A \cdot B)$
→ 2.	A	supuesto
3.	B	1, 2, M.P.
4.	$A \cdot B$	2, 3, Conj.
5.	$A \supset (A \cdot B)$	2–4, C.P.

Debe observarse que *solamente* un renglón inferido por el principio de Demostración Condicional termina el alcance de un supuesto, y que *todo* uso de la regla de Demostración Condicional sirve para terminar el alcance de un supuesto. Cuando se ha terminado el alcance de un supuesto se dice que este supuesto ha sido liberado y ningún renglón subsecuente podrá justificarse con referencia al supuesto o con referencia a ningún renglón que se encuentre entre el mismo y el renglón inferido por la regla de Demostración Condicional que lo libera. Tan sólo los renglones que se encuentren entre un supuesto de alcance limitado y el renglón que lo libera pueden justificarse con referencia a este supuesto. Después de haber liberado un supuesto de alcance limitado puede hacerse otro supuesto semejante y liberársele después. O también puede hacerse otro supuesto de alcance limitado dentro del alcance del primero. Los alcances de supuestos diferentes pueden seguir el uno al otro o estar uno de ellos enteramente contenido en el otro.

Si el alcance de un supuesto *no* se extiende hasta el final de una demostración, entonces el renglón final de la demostración no *depende* de ese supuesto, sino que se ha demostrado que se sigue de las premisas originales solamente. En consecuencia, no necesitamos restringirnos a la utilización de supuestos que sólo sean antecedentes de conclusiones condicionales. *Cualquier* proposición puede tomarse como supuesto de alcance limitado, pues el renglón final que es la conclusión estará siempre más allá de su alcance y será independiente del mismo.

Una demostración más compleja que involucra *dos* supuestos es la que damos a continuación (incidentalmente cuando usamos nuestra notación de flecha doblada, no es necesario escribir la palabra "supuesto", ya que cada supuesto está suficientemente identificado como tal por la punta de flecha que se halla a su izquierda):

1.	$(A \vee B) \supset [(C \vee D) \supset E]$	$/\therefore A \supset [(C \cdot D) \supset E]$
2.	A	
3.	$A \vee B$	2, Ad.
4.	$(C \vee D) \supset E$	1, 3, M.P.
5.	$C \cdot D$	
6.	C	5, Simp.
7.	$C \vee D$	6, Ad.
8.	E	4, 7, M.P.
9.	$(C \cdot D) \supset E$	5–8, C.P.
10.	$A \supset [(C \cdot D) \supset E]$	2–9, C.P.

En esta demostración, los renglones 2 al 9 están dentro del alcance del primer supuesto, mientras que los renglones 5, 6, 7 y 8 están dentro del alcance del segundo supuesto. De estos ejemplos claramente se ve que el alcance del supuesto α en una demostración consiste en todos los renglones α hasta φ, donde el renglón que sigue a φ es de la forma $\alpha \supset \varphi$ y está inferido por C.P. de dicha secuencia de renglones. En la demostración precedente, el segundo supuesto está dentro del alcance del primero, porque está entre el primer supuesto y el renglón 10 que es inferido por C.P. a partir de la secuencia de los renglones 2 al 9.

Cuando usamos este nuevo método de escritura de una Demostración Condicional de validez el alcance de cada premisa original se extiende hasta el final de la demostración. Las premisas originales pueden complementarse agregando supuestos adicionales siempre que los alcances de estos últimos sean limitados y no se extiendan hasta el final de la demostración. Cada renglón de una demostración formal de validez debe ser o una premisa o un supuesto de alcance limitado, o debe seguirse válidamente a partir de uno o dos renglones precedentes por una regla de inferencia, o debe seguirse de una *secuencia* de renglones que le preceda por el principio de Demostración Condicional.

Debe observarse que el principio reforzado de Demostración Condicional incluye el método de Demostración Indirecta como caso especial. Ya que cualquier supuesto de alcance limitado puede hacerse en una Demostración Condicional de validez, podemos tomar como supuesto la negación de la conclusión del argumento. Después de obtener una contradicción, se puede *continuar* por la contradicción hasta obtener la conclusión deseada por el Silogismo Disyuntivo y por la Adición. Una vez que se ha hecho esto, podemos usar la regla de Demostración Condicional para terminar el alcance de ese supuesto y obtener un condicional cuyo consecuente sea la conclusión del argumento y cuyo antecedente sea la negación de esa conclusión. Y de un condicional semejante se seguirá la conclusión del argumento por Implicación, Doble Negación y Tautología.

De aquí en adelante nos referiremos a la regla de Demostración Condicional reforzada simplemente como la regla de Demostración Condicional.

EJERCICIOS

Utilice el método de demostración condicional reforzado para demostrar la validez de los siguientes argumentos.

*1. $A \supset B$
$B \supset [(C \supset \sim\sim C) \supset D]$
$\therefore A \supset D$

2. $(E \vee F) \supset G$
$H \supset (I \cdot J)$
$\therefore (E \supset G) \cdot (H \supset I)$

3. $(K \supset L) \cdot (M \supset N)$
$(L \vee N) \supset \{[O \supset (O \vee P)] \supset (K \cdot M)\}$
$\therefore K \equiv M$

4. $Q \vee (R \supset S)$
$[R \supset (R \cdot S)] \supset (T \vee U)$
$(T \supset Q) \cdot (U \supset V)$
$\therefore Q \vee V$

5. $[W \supset (\sim X \cdot \sim Y)] \cdot [Z \supset \sim(X \vee Y)]$
$(\sim A \supset W) \cdot (\sim B \supset Z)$
$(A \supset X) \cdot (B \supset Y)$
$\therefore X \equiv Y$

6. $(C \vee D) \supset (E \supset F)$
$[E \supset (E \cdot F)] \supset G$
$G \supset [(\sim H \vee \sim\sim H) \supset (C \cdot H)]$
$\therefore C \equiv G$

3.9. Técnica Abreviada de Tabla de Verdad—Método de *Reducción al Absurdo*

Hay todavía otro método de probar la validez de los argumentos y de clasificar los enunciados en tautológicos, contradictorios o contingentes. En la sección precedente señalamos que un argumento es inválido si y sólo si es posible asignar valores de verdad a sus enunciados simples componentes de forma tal que las premisas se hagan verdaderas y la conclusión falsa. Es imposible hacer tales asignaciones de valores de verdad en el caso en que el argumento sea válido. Por tanto, para demostrar que un argumento es válido es suficiente demostrar que no se pueden asignar valores de esa manera. Lo hacemos mostrando que sus premisas pueden hacerse verdaderas al tiempo que su conclusión falsa solamente dando valores de verdad de *manera inconsistente*, de modo que algún enunciado componente tiene asignados ambos valores, **T** y **F**. En otras palabras, si el valor **T** se asigna a cada premisa y el valor **F** a la conclusión de un argumento válido, esto requerirá que se asigne *tanto* **T** como **F** a algún enunciado componente, lo que desde luego es una contradicción.

Así, para demostrar la validez del argumento

$$(A \vee B) \supset (C \cdot D)$$
$$(D \vee E) \supset F$$
$$\therefore A \supset F$$

asignamos **T** a cada premisa y **F** a la conclusión. Asignar **F** a la conclusión requiere que se asigne **T** a A y **F** se asigne a F. Como se ha asignado **T** a A, el antecedente de la primera premisa es verdadero, y como la premisa tiene asignado **T**, su consecuente debe también tener el valor verdadero, lo que implica que **T** se asigne tanto a C como a D. Como D tiene el valor **T**, el antecedente de la segunda premisa es verdadero, y como la premisa tiene asignado el valor **T**, también su consecuente debe tener el valor verdadero luego F debe tener el valor **T**. Pero ya nos hemos visto obligados a asignar el valor **F** a F para hacer la conclusión falsa. Por lo tanto, el argumento es inválido sólo si el enunciado F es verdadero y es falso, cosa imposible. Este método de demostrar la validez de un argumento es una versión de la técnica de *reducción al absurdo*, que utiliza asignaciones de valores de verdad y no Reglas de Inferencia.

Es fácil extender el uso de este método a la clasificación de enunciados (y formas sentenciales). Así, para certificar que la ley de Peirce $[(p \supset q) \supset p] \supset p$ es una tautología, asignamos a la misma el valor **F**, que requiere asignar **T** a su antecedente $[(p \supset q) \supset p]$ y **F** a su consecuente p. Para que el condicional $[(p \supset q) \supset p]$ sea verdadero siendo *su* consecuente p falso, su antecedente $(p \supset q)$ debe tener asignado el valor de verdad **F** también. Pero para que el condicional $p \supset q$ sea falso, su antecedente p debe tener asignado el valor **T** y su consecuente q asignado **F**. Sin embargo, ya nos vimos obligados previamente a asignar **F** a p, de modo que suponiendo falsa la ley de Peirce se llega a una contradicción, lo que demuestra que es una tautología.

Si *es* posible asignar consistentemente valores de verdad a sus componentes sobre el supuesto de que es falsa, la expresión en cuestión no es una tautología, sino que o es una contradicción o una contingencia. En tal caso intentamos asignar valores de verdad que la hagan verdadera. Si esto conduce a una contradicción la expresión no puede ser verdadera y debe ser una contradicción. Pero si se pueden asignar valores de verdad para hacerla verdadera y otros valores para hacerla falsa, entonces no es ni una tautología ni una contradicción, sino que es contingente.

El método de *reducción al absurdo* de asignar valores de verdad es con mucho el más fácil y más rápido de los métodos de prueba de argumentos y clasificación de enunciados. Sin embargo, su aplicación es más o menos fácil, dependiendo del caso. Si se asigna **F** a una disyunción, debe asignarse **F** a ambos disyuntos, y cuando se asigne **T** a una conjunción habrá que dar el valor **T** a cada uno de los enunciados conyuntos. Aquí la secuencia de asignaciones es forzada. Pero donde haya que asignar **T** a una disyunción o **F** a una conjunción, esta asignación no determina por sí misma *cuál* de los disyuntos es verdadero o *cuál* de los conyuntos es falso. Aquí tendríamos que experimentar y hacer varias "asignaciones de prueba", lo que reduce la ventaja del método para casos tales. A pesar de estas complicaciones, sin embargo, en la gran mayoría de los casos el método de *reducción al absurdo* es superior a cualquier otro método conocido.

EJERCICIOS

1. Use el método de *reducción al absurdo* de asignación de valores de verdad para decidir la validez o la invalidez de las formas de argumentos de los ejercicios de las Págs. 40 a 43.

2. Use el método de *reducción al absurdo* de asignar valores de verdad para establecer que los enunciados de los Ejercicios I y II de las Págs. 79-80 son tautologías.

3. Use el método de *reducción al absurdo* de asignación de valores de verdad para clasificar las formas sentenciales del Ejercicio I, de la Pág. 47, como tautológicas, contradictorias o contingentes

4

Funciones Proposicionales y Cuantificadores

4.1. Proposiciones Singulares y Proposiciones Generales

Las técnicas lógicas hasta aquí desarrolladas sólo se aplican a los argumentos cuya validez depende de la manera en que se combinan los enunciados simples en enunciados compuestos función de verdad. Esas técnicas no son aplicables a argumentos tales como:

Todos los humanos son mortales.
Sócrates es humano.
Por lo tànto, Sócrates es mortal.

La validez de un tal argumento depende de la estructura lógica interna de los enunciados no compuestos que contiene. Para evaluar tales argumentos debemos desarrollar métodos de análisis de enunciados no compuestos y desarrollar una simbología para sus estructuras internas.

La segunda premisa del argumento que precede es una *proposición singular;* afirma que el individuo Sócrates tiene el atributo de ser humano. "Sócrates" es llamado el término *sujeto* y "humano", el término *predicado.* Cualquier proposición singular (afirmativa) asegura que el individuo al que se refiere el término sujeto tiene el atributo que designa su término predicado. Consideramos individuos no sólo a las personas, sino también a cualesquier cosas: animales, ciudades, naciones, planetas o estrellas de los cuales pueden significativamente predicarse atributos. Los atributos no sólo son designados por los adjetivos, sino también por nombres o adverbios y aun por verbos; así "Elena es un encanto" y "Elena encanta" tienen el mismo significado que también puede expresarse como: "Elena es encantadora".

En las proposiciones singulares, como símbolos para denotar los individuos usamos las minúsculas *"a"* hasta *"w"*, tomando, usualmente, la primera letra del nombre de un individuo para denotar a éste. Como estos símbolos denotan individuos, los llamamos constantes individuales. Para designar atributos usamos letras mayúsculas, siguiendo el mismo principio en su selección. Así, en el contexto del argumento precedente se denota Sócrates con *s* y simbolizamos los atributos *humano* y *mortal* por medio de las letras mayúsculas "*H*" y "*M*". Para expresar una proposición singular en nuestro simbolismo escribimos el símbolo de su término predicado a la izquierda del símbolo para su término sujeto. De este modo simbolizamos "Sócrates es humano" como "*Hs*" y "Sócrates es mortal" como "*Ms*".[1]

Examinando las formulaciones simbólicas de las proposiciones singulares que tienen el mismo término predicado, observamos que siguen un patrón común. Las formulaciones simbólicas de las proposiciones singulares "Aristóteles es humano", "Boston es humano", "California es humana", "Descartes es humano", . . . , que son "*Ha*", "*Hb*", "*Hc*", "*Hd*", . . . , cada una consiste en el símbolo de atributo "*H*" seguido por una constante individual. Usamos el símbolo "*Hx*" para simbolizar el patrón común de todas las proposiciones singulares que afirman qué individuos tienen el atributo *humano*. La minúscula "*x*" —llamada una variable individual— es meramente un *señalador* que sirve para indicar dónde puede escribirse una constante individual para dar lugar a una proposición singular. Las proposiciones singulares "*Ha*", "*Hb*", "*Hc*", "*Hd*", . . . o son verdaderas o son falsas; pero "*Hx*", no es verdadera ni es falsa pues no es una proposición. Expresiones tales como "*Hx*", son denominadas "funciones proposicionales" Estas se definen como expresiones que contienen variables individuales y se convierten en proposiciones cuando sus variables individuales son reemplazadas por constantes individuales.[2] Toda proposición singular puede considerarse como una *instancia de sustitución* de la función proposicional de la que resulta por la sustitución de una constante individual para la variable individual en la función proposicional. El proceso de obtener una proposición a partir de una función proposicional sustituyendo una constante por una variable se llama "instanciación". Las proposiciones singulares negativas "Aristóteles no es humano" y "Boston no es humano", que se simbolizan como "$\sim Ha$" y "$\sim Hb$", resultan por *instanciación* de la función proposicional "$\sim Hx$" de la cual son instancias de sustitución. Vemos así que en las funciones proposicionales se pueden presentar

[1] Algunos lógicos encierran las constantes individuales entre paréntesis, simbolizando "Sócrates es humano" como "*H*(*s*)", pero no nos apegaremos a esta escritura en esta obra.

[2] Algunos autores definen las "funciones proposicionales" como los *significados* de expresiones tales, pero aquí las definimos como las expresiones mismas.

otros símbolos además de los símbolos de atributos y las variables individuales.

Las proposiciones generales tales como "Todo es mortal" y "Algo es mortal" difieren de las proposiciones singulares en no contener nombres de individuos. Sin embargo, también pueden considerarse como resultantes de las funciones proposicionales, no por instanciación, sino por el proceso llamado "generalización" o "cuantificación". El primer ejemplo, "Todo es mortal", puede expresarse de manera alternativa como

Dada cualquier cosa individual, ésta es mortal.

Aquí el pronombre demostrativo ésta (o el pronombre relativo "ella") se refiere a la palabra "cosa" que le precede en el enunciado. Podemos usar la variable individual "x" en lugar del pronombre "ella" y su antecedente parafraseando la primera proposición general como

Dado cualquier x,x es mortal.

Podemos usar entonces la notación que ya hemos introducido para reescribirlo, como

Dado cualquier x, Mx.

La frase "Dado cualquier x" es un "cuantificador universal" y se simboliza como "(x)". Usando este nuevo símbolo podemos simbolizar completamente nuestra primera proposición general como

$$(x)Mx$$

De manera semejante podemos parafrasear la segunda proposición general "Algo es mortal", sucesivamente como

Existe cuando menos una cosa que es mortal.
Existe cuando menos una cosa tal que ésta es mortal.
Existe cuando menos un x tal que x es mortal.

y como

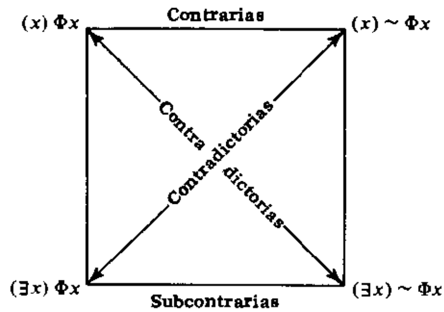
Existe cuando menos un x tal que Mx.

La frase "Existe cuando menos un x tal que" es un "cuantificador existencial" y se simboliza como "$(\exists x)$". Utilizando el nuevo símbolo podemos simbolizar por completo nuestra segunda proposición general como

$$(\exists x)Mx$$

Una proposición general se obtiene de una función proposicional poniendo o un cuantificador universal o un cuantificador existencial antes de la misma. Es obvio que la cuantificación universal de una función proposicional es verdadera si y sólo si todas sus instancias de sustitución son verdaderas, y que la cuantificación existencial de una función proposicional es verdadera si y sólo si tiene cuando menos una instancia de sustitución verdadera. Concediendo que hay al menos un individuo, entonces toda función proposicional tiene al menos una instancia de sustitución (verdadera o falsa). Con esta hipótesis, si la cuantificación universal de una función proposicional es verdadera, entonces su cuantificación existencial también debe serlo.

Otra relación entre la cuantificación universal y la cuantificación existencial se muestra considerando dos proposiciones generales adicionales "Algo no es mortal" y "Nada es mortal", que son las negaciones respectivas de las dos proposiciones generales primeramente consideradas. "Algo no es mortal" se simboliza como "$(\exists x) \sim Mx$" y "Nada es mortal" como "$(x) \sim Mx$". Estas muestran que la negación de la cuantificación universal (existencial) de una función proposicional es lógicamente equivalente a la cuantificación existencial (universal) de la nueva función proposicional que resulta al poner un símbolo de negación frente a la primera función proposicional. Usando la letra griega Φ para representar cualquier símbolo de atributo, los enlaces generales entre la cuantificación universal y la existencial pueden describirse en términos del siguiente diagrama cuadrado:



Suponiendo la existencia de al menos un individuo: podemos decir que las dos proposiciones de arriba son *contrarias*, esto es, que ambas pueden ser falsas, pero no pueden ser ambas verdaderas; las dos proposiciones de la parte baja son *subcontrarias*, es decir, que pueden ser ambas verdaderas, pero no pueden ambas ser falsas; las proposiciones que están en los extremos de las diagonales son *contradictorias*, una de las cuales debe ser verdadera y la otra falsa; y finalmente, de cada lado, la verdad de la proposición más baja es implicada por la verdad de la proposición situada directamente arriba de ella.

La lógica tradicional hacía énfasis en los cuatro tipos de proposiciones sujeto-predicado ilustrados por las siguientes:

Todos los humanos son mortales.
Ningún humano es mortal.
Algunos humanos son mortales.
Algunos humanos no son mortales.

Estas se clasificaban respectivamente como "afirmativa universal", "negativa universal", "afirmativa particular", y "negativa particular", y sus tipos se abreviaban como "**A**", "**E**", "**I**", "**O**". (Los nombres de las letras se presume que provienen del latín "***A**ff**I**rmo*" y, "*n**E**g**O***, que significan *yo afirmo* y *yo niego.*) Estas 4 formas especiales de proposiciones sujeto-predicado fácilmente se simbolizan por medio de las funciones proposicionales y los cuantificadores.[3] El primero de ellos, la proposición ***A*** puede sucesivamente parafrasearse como

Dada cualquier cosa individual, si ésta es humana entonces ésta es mortal.
Dado cualquier x, si x es humano entonces x es mortal.
Dado cualquier x, x es humano $\supset$ x es mortal.

que finalmente se simboliza como

$$(x)[Hx \supset Mx]$$

Nuestra formulación simbólica de la proposición ***A*** es la cuantificación universal de la función proposicional compleja "$Hx \supset Mx$", cuyas instancias de sustitución no son proposiciones singulares sino condicionales cuyos antecedentes y consecuentes son proposiciones singulares que tienen los mismos términos sujeto. Entre las instancias de sustitución de la función proposicional "$Hx \supset Mx$" están los condicionales "$Ha \supset Ma$", "$Hb \supset Mb$", "$Hc \supset Mc$" y así sucesivamente. Al simbolizar una proposición ***A***, los corchetes sirven de puntuación para indicar que el cuantificador universal "(x)" *se aplica a*, o *tiene dentro de su alcance*, la totalidad de la función proposicional compleja "$Hx \supset Mx$". La noción de *alcance de un cuantificador* es muy importante, pues las diferencias en alcance corresponden a diferencias en significado. La expresión "$(x)[Hx \supset Mx]$" es una proposición que afirma que todas las instancias de sustitución de la función proposicional "$Hx \supset Mx$" son verdaderas. Por otro lado, la expresión "$(x)Hx \supset Mx$" es una función proposicional cuyas instancias de sustitución son "$(x)Hx \supset Ma$", "$(x)Hx \supset Mb$", "$(x)Hx \supset Mc$", etc.[4]

---

[3] En el Apéndice B se presenta un método alternativo de simbolizarlos.

[4] Para los cuantificadores (universal y existencial) se convendrá lo establecido para la negación a principios de la Pág. 27, Cap. 2: un cuantificador se aplica a, o tiene como alcance, la más pequeña de las componentes que la puntuación permita.

La proposición de tipo **E** "Ningún humano es mortal", puede parafrasearse sucesivamente como

> Dada cualquier cosa individual, si ésta es humana entonces no es mortal.
> Dado cualquier x, si x es humano entonces x no es mortal.
> Dado cualquier x, x es humano $\supset$ x no es mortal.

si se simboliza después como

$$(x)[Hx \supset \sim Mx]$$

De manera semejante, la proposición de tipo **I** "Algunos humanos son mortales", se puede parafrasear como

> Existe cuando menos una cosa que es humana y mortal.
> Existe cuando menos una cosa tal que ésta es humana y ésta es mortal.
> Existe cuando menos un x tal que x es humano y x es mortal.
> Existe cuando menos un x tal que x es humano $\cdot x$ es mortal.

y se le simboliza completamente como

$$(\exists x)[Hx \cdot Mx]$$

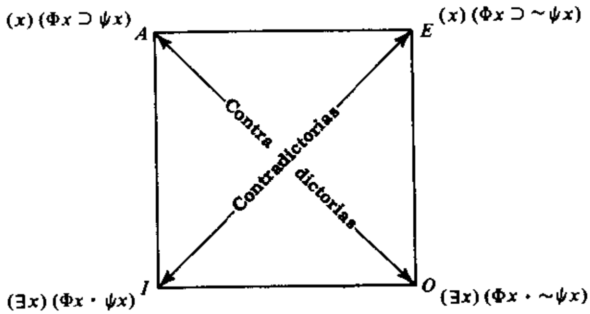
Finalmente, la proposición de tipo **O** "Algunos humanos no son mortales" viene a ser

> Existe cuando menos una cosa que es humana, pero no mortal.
> Existe cuando menos una cosa tal que ésta es humana y ésta no es mortal.
> Existe cuando menos una x tal que x es humano y x no es mortal.

y entonces se simboliza como la cuantificación existencial de una función compleja

$$(\exists x)[Hx \cdot \sim Mx]$$

Usando las letras griegas *fi* Φ y *psi* Ψ para representar cualesquier símbolos de atributo, las cuatro proposiciones generales sujeto-predicado de la lógica tradicional se pueden representar en un diagrama cuadrado como



De éstas, la ***A*** y la ***O*** son contradictorias y también son contradictorias la ***E*** y la ***I***. Pero ninguna de las otras relaciones discutidas en conexión con el diagrama cuadrado que aparece en la Pág. 90 se da entre las proposiciones tradicionales ***A***, ***E***, ***I*** y ***O***, aun cuando se suponga que hay un individuo en el universo. Si "Φx" es una función proposicional sin instancias de sustitución verdaderas, entonces sin atención al atributo que simbolice "Ψ" las funciones proposicionales "$\Phi x \supset \Psi x$" y "$\Phi x \supset \sim \Psi x$" tienen solamente instancias de sustitución verdaderas, pues todas sus instancias de sustitución son enunciados condicionales con antecedentes falsos. En tales casos las proposiciones ***A*** y ***E*** que son las cuantificaciones universales de estas funciones proposicionales complejas son verdaderas, de modo que las proposiciones ***A*** y ***E*** no son proposiciones contrarias. Nuevamente, sea "Φx" una función proposicional sin instancia de sustitución verdadera, entonces, independientemente de lo que "Ψx" pueda significar, las funciones proposicionales "$\Phi x \cdot \Psi x$" y "$\Phi x \cdot \sim \Psi x$" tienen sólo instancias de sustitución falsas, pues sus instancias de sustitución son conjunciones cuyos primeros enunciados conyuntos son falsos. En tales casos las proposiciones ***I*** y ***O*** que son las cuantificaciones existenciales de estas funciones proposicionales complejas son falsas, de modo que ***I*** y ***O*** son proposiciones no subcontrarias. En tales casos, entonces, ya que las proposiciones ***A*** y ***E*** son verdaderas y las proposiciones ***I*** y ***O*** son falsas, la verdad de una universal *no* implica la verdad de la particular correspondiente; no hay relación de implicación entre ellas.

Si hacemos el supuesto de que hay cuando menos un individuo, entonces "$(x)[\Phi x \supset \Psi x]$" implica "$(\exists x)[\Phi x \supset \Psi x]$". Pero la última *no* es una proposición ***I***. Una proposición ***I*** de la forma "Algunos Φ son Ψ se simboliza como "$(\exists x)[\Phi x \cdot \Psi x]$" que afirma que hay cuando menos una cosa que tiene el atributo Φ y el atributo Ψ. Pero la proposición "$(\exists x)[\Phi x \supset \Psi x]$" afirma que hay cuando menos un objeto que o tiene el atributo Ψ o no tiene el atributo Φ que es una afirmación muy diferente y mucho más débil.

Las cuatro formas tradicionales sujeto-predicado ***A***, ***E***, ***I*** y ***O*** no son las únicas formas de proposiciones generales. Hay otras que involucran la cuantificación de funciones proposicionales más complicadas. Así la proposición general "Todos los miembros son padres o maestros" que no significa lo mismo que "Todos los miembros son padres o todos los miembros son maestros", se simboliza como "$(x)[Mx \supset (Px \vee Tx)]$". Y la proposición general "Algunos Senadores son o desleales o mal aconsejados", se simboliza como "$(\exists x)[Sx \cdot (Dx \vee Mx)]$". Debe observarse que una proposición tal como "Las manzanas y los plátanos son nutritivos" puede simbolizarse como la conjunción de dos proposiciones de tipo *A*, "$\{(x)[Ax \supset Nx\} \cdot \{(x)[Bx \supset Nx]\}$", o como una proposición general no compuesta "$(x)[(Ax \vee Bx) \supset Nx]$". Pero *no* debiera simbolizarse como "$(x)[(Ax \cdot Bx) \supset Nx]$", pues decir que las manzanas y los plátanos son nutritivos es decir que cualquier cosa que es *o* una manzana *o* un plátano es nutritiva y *no* es decir que cualquier cosa que es manzana *y* plátano (sin importar lo que pudiera ser esto) es nutritiva. Hay que recalcar que no hay reglas para traducir los enunciados del lenguaje ordinario inglés o español a nuestra notación lógica. En cada caso hay que *comprender el significado* de la oración en español para *reexpresarla* en términos de funciones proposicionales y cuantificadores.

EJERCICIOS

I. Traducir cada una de las siguientes oraciones a la notación lógica de las funciones proposicionales y los cuantificadores, usando en cada caso abreviaciones que se sugieren de modo que cada forma comience con un cuantificador y *no* con un símbolo de negación:

*1. Las serpientes son reptiles. (Sx: x es una serpiente. Rx: x es un reptil.)
2. Las serpientes no son todas venenosas. (Sx: x es una serpiente. Vx: x es venenosa.)
3. Los niños están presentes. (Nx: x es un niño. Px: x está presente.)
4. Los ejecutivos todos tienen secretarias. (Ex: x es un ejecutivo. Sx: x tiene una secretaria.)
*5. Sólo los ejecutivos tienen secretarias. (Ex: x es un ejecutivo. Sx: x tiene una secretaria.)
6. Sólo los propietarios pueden votar en las elecciones municipales especiales. (Px: x es un propietario. Vx: x puede votar en las elecciones municipales especiales.)
7. Los empleados sólo podrán utilizar el ascensor de servicio. (Ux: x es un ascensor que los empleados podrán utilizar. Ax: x es un ascensor de servicio.)
8. Sólo los empleados podrán utilizar el ascensor de servicio. (Ex: x es un empleado. Ux: x puede utilizar el ascensor de servicio.)
9. No todo lo que brilla es oro. (Bx: x brilla. Ox: x es oro.)
*10. Nadie sino los valientes merecen a la bella. (Bx: x es valiente. Dx: x merece a la bella.)
11. No todos los visitantes se quedaron a cenar. (Vx: x es un visitante. Qx: x se quedó a cenar.)
12. Ningún visitante se quedó a cenar. (Vx: x es un visitante. Qx: x se quedó a cenar.)
13. Nada en la casa escapó a la destrucción. (Cx: x estaba en la casa. Ex: x escapó a la destrucción.)
14. Algunos estudiantes son inteligentes y trabajadores. (Ex: x es un estudiante. Ix: x es inteligente. Tx: x es trabajador.)

*15. Ningún abrigo es impermeable a menos que haya sido especialmente tratado. (Cx: x es un abrigo. Wx: x es impermeable. Sx: x ha sido especialmente tratado.)
16. Algunos medicamentos son peligrosos sólo si se toman en cantidades excesivas. (Mx: x es un medicamento. Px: x es peligroso. Ex: x se toma en cantidades excesivas.)
17. Todas las frutas y las verduras son sanas y nutritivas. (Fx: x es una fruta. Vx: x es una verdura Sx: x es sana. Nx: x es nutritiva.
18. Cada cosa placentera es o inmoral, o ilegal, o engorda. (Px: x es placentera. Mx: x es moral. Lx: x es legal. Ex: x engorda.)
19. Un profesor es un buen conferencista si y sólo si está bien informado y es entretenido. (Px: x es un profesor. Cx: x es un buen conferencista: Bx: x está bien informado. Ex: x es entretenido.)
*20. Sólo los policías y los bomberos son independientes y mal pagados. (Px: x es un policía. Fx: x es un bombero. Ix: x es indispensable. Ux: x es mal pagado.)
21. No todo actor famoso tiene talento. (Ax: x es un actor. Fx: x es famoso. Tx: x tiene talento.)
22. Cualquier chica es atractiva si es bien arreglada y de buen gusto. Cx: x es una chica. Ax: x es atractiva. Bx: x es bien arreglada. Gx: x es de buen gusto.)
23. No es verdad que todo reloj dará la hora correcta si y sólo si se le da cuerda con regularidad y no se le maltrata. (Rx: x es un reloj. Dx: x da la hora correcta. Cx: x se le da cuerda con regularidad. Mx: x es maltratado.)
24. No toda persona que habla mucho tiene mucho que decir. (Px: x es una persona. Hx: x habla mucho. Tx: x tiene mucho que decir.)
*25. Ningún automóvil que tenga más de diez años será reparado si está seriamente dañado. (Ax: x es un automóvil. Ox: x tiene más de diez años. Rx: x será reparado. Dx: x está seriamente dañado.)

Al simbolizar las siguientes, usar las abreviaciones: Cx: x es un caballo. Dx: x es dócil. Ex: x está bien entrenado.

26. Algunos caballos son dóciles y están bien entrenados.
27. Algunos caballos son dóciles sólo si están bien entrenados.
28. Algunos caballos son dóciles si están bien entrenados.
29. Cualquier caballo que está bien entrenado es dócil.
*30. Cualquier caballo que es manso está bien entrenado.
31. Ningún caballo es manso a menos que esté bien entrenado.
32. Cualquier caballo es manso si está bien entrenado.
33. Cualquier caballo está bien entrenado si es dócil.
34. Cualquier caballo es dócil si y sólo si está bien entrenado.
35. Los caballos dóciles están bien entrenados.

II. Simbolizar las siguientes proposiciones usando funciones proposicionales y cuantificadores.

*1. Bienaventurado el que se preocupa por el necesitado. (Salmo 41:1)
2. Es parco en palabras quien tiene la Sabiduría. (Proverbios 17:27)
3. El que halla mujer encuentra la ventura. (Proverbios 18:22)
4. El que de prisa se enriquece no lo hará sin culpa. (Proverbios 28:20)
*5. Se sentará cada uno bajo su parra y bajo su higuera. (Miqueas 4:4)

6. Aquel que aumenta su saber, aumenta su dolor. (Eclesiastés 1:18)
7. Nada hay secreto que no haya de conocerse y salir a la luz. (San Lucas 8:17)
8. El señor a quien ama, le reprende. (Hebreos 12:6)
9. En el camino hay un chacal; un león en la plaza. (Proverbios 26:13)
10. El que aborrece se enmascara con los labios; pero dentro lleva la traición. (Proverbios 26:24)

4.2. Demostración de Validez: Reglas Preliminares de Cuantificación

Para construir demostraciones de validez para argumentos simbolizados por medio de cuantificadores y funciones proposicionales debemos aumentar nuestra lista de Reglas de Inferencia. Agregaremos cuatro reglas que regulan la cuantificación, dando en esta sección una versión sobresimplificada de las mismas, y una formulación más adecuada en la Sec. 4.5.

1. Instanciación Universal (Versión Preliminar). Como la cuantificación universal de una función proporcional es verdadera si y sólo si todas las instancias de sustitución de esa función proposicional son verdaderas, podemos agregar a nuestra lista de Reglas de Inferencia el principio de que toda instancia de sustitución de una función proposicional puede inferirse válidamente de su cuantificación universal. Esta regla podemos expresarla simbólicamente como

$$\frac{(x)\Phi x}{\therefore \Phi \nu} \quad \text{(donde } \nu \text{ es cualquier símbolo individual)}$$

Como esta regla permite que instancias de sustitución sean inferidas de cuantificaciones universales, nos referiremos a ella como "el principio de Instanciación Universal" y lo abreviaremos como "**UI**".[5] Agregar **UI** nos permite dar una demostración formal de validez para el argumento "Todos los humanos son mortales; Sócrates es humano; luego Sócrates es Mortal"

1. $(x)[Hx \supset Mx]$
2. $Hs \quad / \therefore Ms$
3. $Hs \supset Ms$ 1, UI
4. Ms 3, 2, M.P.

2. Generalización Universal (Versión Preliminar). Nuestra siguiente regla puede explicarse por analogía con lo que se hace en matemáticas a un nivel razonablemente estándar. Un geómetra puede

---

[5] Esta regla y las tres siguientes son variantes de reglas para la "deducción natural" establecidas independientemente por Gerhard Gentzen y Stanislaw Jaśkowski en 1934.

iniciar una demostración diciendo, "Sea *ABC* un triángulo arbitrariamente elegido". Después, puede proseguir demostrando que el triángulo tiene cierto atributo especificado, y concluye que *todos* los triángulos tienen ese atributo especificado. Ahora bien, ¿cómo se justifica su conclusión final? ¿Por qué de que el triángulo *ABC* tenga un atributo especificado se sigue que *todos* los triángulos lo tengan? La respuesta es que si de *ABC* no se supone otra cosa que su triangularidad, entonces la expresión "*ABC*" puede tomarse como denotando cualquier triángulo. Y si el argumento ha establecido que *cualquier* triángulo debe tener el atributo en cuestión, entonces se sigue que *todos* los triángulos lo tienen. Ahora se introduce una notación semejante a la que usa el geómetra al referirse a "un triángulo arbitrariamente elegido". La todavía no usada minúscula "y" se utilizará para denotar *cualquier individuo arbitrariamente elegido.* Convenida esta usanza, la expresión "Φy" es una instancia de sustitución de la función proposicional "Φx" y asegura que *cualquier individuo arbitrariamente elegido* tiene la propiedad Φ. Es claro que "Φy" se sigue con validez de "$(x)\Phi x$" por **UI** puesto que lo que es verdad de todos los individuos es verdad de cualquier individuo arbitrariamente elegido. La inferencia es de igual forma válida en la otra dirección pues lo que es verdad de *cualquier individuo arbitrariamente elegido* debe serlo de *todos* los individuos. Aumentamos nuestra lista de Reglas de Inferencia nuevamente agregando el principio de que la cuantificación universal de una función proposicional puede válidamente inferirse de su instancia de sustitución con respecto al símbolo "y". Como esta regla permite la inferencia de proposiciones generales que son cuantificaciones universales, nos referimos a ella como el "principio de Generalización Universal", y la abreviamos como "**UG**". Nuestra expresión simbólica para esta segunda regla de cuantificación es

$$\frac{\Phi y}{\therefore (x)\Phi x} \quad \text{(donde “}y\text{” denota cualquier individuo arbitrariamente elegido)}$$

Podemos usar la nueva notación y la regla adicional **UG** para construir una demostración formal de validez para el argumento: "Ningún mortal es perfecto; todos los humanos son mortales; por lo tanto, ningún humano es perfecto".

1. $(x)[Mx \supset \sim Px]$
2. $(x)[Hx \supset Mx]$ $\quad /\therefore (x)[Hx \supset \sim Px]$
3. $Hy \supset My$ $\quad$ 2, **UI**
4. $My \supset \sim Py$ $\quad$ 1, **UI**
5. $Hy \supset \sim Py$ $\quad$ 3, 4, H.S.
6. $(x)[Hx \supset \sim Px]$ $\quad$ 5, **UG**

3. Generalización Existencial (Versión Preliminar). Como la cuantificación existencial de una función proposicional es verdadera si y sólo si esa función proposicional tiene al menos una instancia de sustitución, podemos agregar a nuestra lista de Reglas de Inferencia el principio de que la cuantificación existencial de una función proposicional pueda válidamente inferirse de cualquier instancia de sustitución de esa función proposicional. Esta regla permite la inferencia de proposiciones generales existencialmente cuantificadas, de modo que la denominamos el "principio de Generalización Existencial" y la abreviamos como "**EG**". Su formulación simbólica es

$$\frac{\Phi\nu}{\therefore (\exists x)\Phi x} \quad \text{(donde } \nu \text{ es cualquier símbolo individual)}$$

4. Instanciación Existencial (Versión Preliminar). Se requiere una regla de cuantificación más. La cuantificación existencial de una función proposicional afirma que existe al menos un individuo tal que la sustitución de su nombre por la variable "x" en esa función proposicional dará una instancia de sustitución verdadera de la misma. Desde luego, podemos no saber nada más respecto al individuo. Pero podemos tomar cualquier constante individual que no sea "y", digamos "w", que no haya aparecido anteriormente en ese contexto y usarla para denotar el individuo o uno de los individuos cuya existencia ha sido afirmada por la cuantificación existencial. Sabiendo que existe un tal individuo y habiendo convenido en denotarlo con "w", podemos inferir de la cuantificación existencial de una función proposicional, la instancia de sustitución de esa función proposicional con respecto al símbolo individual "w". Agregamos como nuestra regla de cuantificación final, el principio que, de la cuantificación existencial de una función proposicional, válidamente podemos inferir la verdad de su instancia de sustitución con respecto a una constante individual que no tenga ocurrencias previas en ese contexto. La nueva regla puede escribirse como

$$\frac{(\exists x)\Phi x}{\therefore \Phi\nu} \quad \begin{array}{l}\text{(donde } \nu \text{ es una constante individual diferente de} \\ \text{"}y\text{", que no aparece anteriormente en el contexto)}\end{array}$$

A éste se refiere como el "principio de Instanciación Existencial" y se le abrevia "**EI**".

Utilizamos las dos reglas de cuantificación últimas en la construcción de una demostración formal de validez para el argumento: "Todos los perros son carnívoros; algunos animales son perros; por lo tanto, algunos animales son carnívoros".

1. $(x)[Dx \supset Cx]$
2. $(\exists x)[Ax \cdot Dx]$ $\quad /\therefore (\exists x)[Ax \cdot Cx]$

3.	$Aw \cdot Dw$	2, **EI**
4.	$Dw \supset Cw$	1, **UI**
5.	$Dw \cdot Aw$	3, Conm.
6.	Dw	5, Simp.
7.	Cw	4, 6, M.P.
8.	Aw	3, Simp.
9.	$Aw \cdot Cw$	8, 7, Conj.
10.	$(\exists x)[Ax \cdot Cx]$	9, **EG**

Podemos mostrar la necesidad de la restricción indicada en el uso de **EI** considerando el argumento obviamente inválido: "Algunos gatos son animales; algunos perros son animales; por lo tanto, algunos gatos son perros". Si ignorásemos la restricción hecha sobre **EI** de que la instancia de sustitución inferida por la misma puede contener sólo una constante individual que no había ocurrido en el contexto previamente nos podríamos ver conducidos a construir la "demostración" siguiente:

1.	$(\exists x)[Cx \cdot Ax]$	
2.	$(\exists x)[Dx \cdot Ax]$	$/ \therefore (\exists x)[Cx \cdot Dx]$
3.	$Cw \cdot Aw$	1, **EI**
4.	$Dw \cdot Aw$	2, **EI** (incorrecto)
5.	Cw	3, Simp.
6.	Dw	4, Simp.
7.	$Cw \cdot Dw$	5, 6, Conj.
8.	$(\exists x)[Cx \cdot Dx]$	7, **EG**

Aquí el error está en el renglón 4. La segunda premisa nos asegura que hay al menos una cosa que es tanto un perro como un animal. Pero no tenemos libertad de usar el símbolo "w" para denotar esa cosa, pues "w" ya se ha usado para denotar una de las cosas que la primera premisa asegura que son tanto un gato como un animal. Para evitar errores de esta clase hay que obedecer la restricción indicada en el uso de **IE**. Debiera ser claro que siempre que usemos ambos **EI** y **UI** en una demostración para instanciar con respecto a la misma constante individual debemos usar **EI** primero. (Se ha sugerido que podríamos evitar la necesidad de usar **EI** antes que **UI** cambiando la restricción sobre **EI** a la siguiente "donde ν es una constante individual, diferente de "y" que no fue introducida en el contexto por ningún uso previo de **EI**". Pero aun además de que esa formulación presenta una circularidad aparente no impediría la construcción errónea de una "demostración formal de validez" para un argumento inválido tal como "Algunos hombres son bien parecidos. Sócrates es un hombre. Por lo tanto, Sócrates es bien parecido".)

Al igual que las primeras nueve Reglas de Inferencia presentadas en la Sec. 3.1, las cuatro reglas de cuantificación **UI**, **UG**, **EG** y **EI** pueden aplicarse sólo a renglones enteros de una demostración.

Cualquier supuesto de alcance limitado puede hacerse en una Demostración Condicional de validez y en particular, tenemos libertad para hacer un supuesto de la forma "Φy". Así, el argumento "Todos los estudiantes del primer año y los del segundo año están invitados y serán bienvenidos; por lo tanto, todos los estudiantes del primer año están invitados" se demuestra que es válido con la siguiente Demostración Condicional:

1.	$(x)[(Fx \vee Sx) \supset (Ix \cdot Wx)]$	$/\therefore (x)[Fx \supset Ix]$
→ 2.	Fy	
3.	$(Fy \vee Sy) \supset (Iy \cdot Wy)$	1, **UI**
4.	$Fy \vee Sy$	2, Ad.
5.	$Iy \cdot Wy$	3, 4, M.P.
6.	Iy	5, Simp.
7.	$Fy \supset Iy$	2–6, C.P.
8.	$(x)[Fx \supset Ix]$	7, **UG**

Se puede hacer más de un supuesto de alcance limitado al demostrar la validez de argumentos que involucran cuantificadores, como en la siguiente Demostración Condicional:

1.	$(x)[(Ax \vee Bx) \supset (Cx \cdot Dx)]$	
2.	$(x)\{(Cx \vee Ex) \supset [(Fx \vee Gx) \supset Hx\}$	$/\therefore (x)[Ax \supset (Fx \supset Hx)]$
3.	$(Ay \vee By) \supset (Cy \cdot Dy)$	1, **UI**
4.	$(Cy \vee Ey) \supset [(Fy \vee Gy) \supset Hy]$	2, **UI**
→ 5.	Ay	
6.	$Ay \vee By$	5, Ad.
7.	$Cy \cdot Dy$	3, 6, M.P.
8.	Cy	7, Simp.
9.	$Cy \vee Ey$	8, Ad.
10.	$(Fy \vee Gy) \supset Hy$	4, 9, M.P.
→ 11.	Fy	
12.	$Fy \vee Gy$	11, Ad.
13.	Hy	10, 12, M.P.
14.	$Fy \supset Hy$	11–13, C.P.
15.	$Ay \supset (Fy \supset Hy)$	5–14, C.P.
16.	$(x)[Ax \supset (Fx \supset Hx)]$	15, **UG**

EJERCICIOS

I. Construir demostraciones formales de validez para los siguientes argumentos, usando la regla de Demostración Condicional en donde se desee:

*1. $(x)[Ax \supset Bx]$
$\sim Bt$
$\therefore \sim At$

2. $(x)[Cx \supset Dx]$
$(x)[Ex \supset \sim Dx]$
$\therefore (x)[Ex \supset \sim Cx]$

3. $(x)[Fx \supset \sim Gx]$
$(\exists x)[Hx \cdot Gx]$
$\therefore (\exists x)[Hx \cdot \sim Fx]$

4. $(x)[Ix \supset Jx]$
$(\exists x)[Ix \cdot \sim Jx]$
$\therefore (x)[Jx \supset Ix]$

*5. $(x)[Kx \supset Lx]$
$(x)[(Kx \cdot Lx) \supset Mx]$
$\therefore (x)[Kx \supset Mx]$

6. $(x)[Nx \supset Ox]$
$(x)[Px \supset Ox]$
$\therefore (x)[(Nx \vee Px) \supset Ox]$

7. $(x)[Qx \supset Rx]$
$(\exists x)[Qx \vee Rx]$
$\therefore (\exists x)Rx$

8. $(x)[Sx \supset (Tx \supset Ux)]$
$(x)[Ux \supset (Vx \cdot Wx)]$
$\therefore (x)[Sx \supset (Tx \supset Vx)]$

9. $(x)[(Xx \vee Yx) \supset (Zx \cdot Ax)]$
$(x)[(Zx \vee Ax) \supset (Xx \cdot Yx)]$
$\therefore (x)[Xx \equiv Zx]$

10. $(x)[(Bx \supset Cx) \cdot (Dx \supset Ex)]$
$(x)[(Cx \vee Dx) \supset \{[Fx \supset (Gx \supset Fx)] \supset (Bx \cdot Dx)\}]$
$\therefore (x)[Bx \equiv Dx]$

II. Construir demostraciones formales de validez para los siguientes argumentos, usando la regla de Demostración Condicional en donde se quiera:

***1. Todos los atletas son musculosos. Carlos no es musculoso, por lo tanto, Carlos no es un atleta. (*Ax, Bx, c*)**

2. No se puede depender de los contratistas. Algunos contratistas son ingenieros. Por lo tanto, no se puede depender de algunos ingenieros. (*Cx, Dx, Ex*)

3. Todos los violinistas son alegres. Algunos cazadores no son alegres. Por lo tanto, algunos cazadores no son violinistas. (*Vx, Ax, Cx*)

4. No hay jueces idiotas. Kanter es un idiota. Por lo tanto, Kanter no es un juez. (*Jx, Ix, k*)

***5. Todos los mentirosos son embusteros. Algunos mentirosos son periodistas. Por lo tanto, algunos periodistas son embusteros. (*Lx, Mx, Nx*)**

6. No hay osteópatas que sean pediatras. Algunos charlatanes son pediatras. Por lo tanto, algunos charlatanes no son osteópatas. (*Ox, Px, Cx*)

7. Sólo los vendedores son detallistas. No todos los detallistas son viajeros. Por lo tanto, algunos vendedores no son viajeros. (*Vx, Dx, Tx*)

8. No hay uniformes no lavables. No hay terciopelos lavables. Por lo tanto, no hay uniformes de terciopelo. (*Ux, Lx, Tx*)

9. Sólo los autoritarios son burócratas. Todos los autoritarios son intratables. Por lo tanto, cualquier burócrata es intratable. (*Ax, Bx, Ix*)

***10. Los dátiles son comestibles. Solamente los alimentos son comestibles. Los alimentos son buenos. Por lo tanto, todos los dátiles son buenos. (*Dx, Ex, Fx, Gx*)**

11. Todas las bailarinas son graciosas. María es una estudiante. María es bailarina. Luego algunas estudiantes son graciosas. (*Bx, Gx, Ex, m*)

12. Los tigres son feroces y peligrosos. Algunos tigres son bellos. Por lo tanto, algunas cosas peligrosas son bellas. (*Tx, Fx, Px, Bx*)

13. Los plátanos y las uvas son frutas. Las frutas y las verduras son nutritivas. Luego los plátanos son nutritivos. (*Px, Ux, Fx, Vx, Nx*)

14. Un comunista es un tonto o un bribón. Los tontos son ingenuos. No todos los comunistas son ingenuos. Luego, algunos comunistas son bribones. (*Cx, Tx, Bx, Ix*)
*15. Todos los mayordomos y los camareros son obsequiosos y dignos. Luego todos los mayordomos son dignos. (*Bx, Vx, Ox, Dx*)
16. Todas las casas de ladrillo son calientes y acogedoras. Todas las casas de Englewood son de ladrillo. Luego todas las casas de Englewood son calientes. (*Cx, Lx, Wx, Ax, Ex*)
17. Todos los profesores son instruidos. Todos los profesores instruidos son sabios. Luego todos los profesores son sabios instruidos. (*Px, Ix, Sx*)
18. Todos los diplomáticos son estadistas. Algunos diplomáticos son elocuentes. Todos los estadistas elocuentes son oradores. Luego algunos diplomáticos son oradores. (*Dx, Sx, Ex, Ox*)
19. Los doctores y los abogados son egresados de la Universidad. Todo altruista es un idealista. Algunos abogados no son idealistas. Algunos doctores son altruistas. Luego algunos egresados de la Universidad son idealistas. (*Dx, Ax, Ux, Ix, Ax*)
*20. Las abejas y las avispas pican si están o enojadas o asustadas. Luego, cualquier abeja pica si está enojada. (*Bx, Wx, Sx, Ax, Fx*)
21. Cualquier autor tiene éxito si y sólo si es muy leído. Todos los autores son intelectuales. Algunos autores tienen éxito, pero no son muy leídos. Luego todos los intelectuales son autores. (*Ax, Ex, Lx, Ix*)
22. Todo pasajero viaja en primera o en clase turista. Cada pasajero está en clase turista si y sólo si no es rico. Algunos pasajeros son ricos. No todos los pasajeros son ricos. Luego algunos pasajeros viajan en clase turista. (*Px, Prx, Tx, Rx*)
23. Todos los miembros son oficiales y caballerosos. Todos los oficiales son combatientes. Sólo un pacifista es un caballero o no es combatiente. Ningún pacifista es caballero si es combatiente. Algunos miembros son combatientes si y sólo si son oficiales. Luego no todos los miembros son combatientes. (*Mx, Ox, Cx, Cox, Px*)
24. Los perros lobos y los terrier son perros cazadores. Los perros cazadores y los perros falderos son animales domesticados. Los animales domesticados son mansos y útiles. Algunos perros lobos no son ni mansos ni pequeños. Por lo tanto, algunos terrier son pequeños, pero no son mansos. (*Lx, Tx, Cx, Fx, Dx, Mx, Ux, Px*)
25. Ningún individuo que sea candidato será derrotado si hace una buena campaña. Todo individuo que se postula es un candidato. Cualquier candidato que no sea derrotado será elegido. Todo individuo que sea elegido hace una buena campaña. Por lo tanto, todo individuo que se postula será elegido si y sólo si hace buena campaña. (*Ix, Cx, Dx, Bx, Px, Ex*)

4.3. Demostración de Invalidez

En el capítulo precedente demostramos la invalidez de argumentos inválidos que contenían argumentos compuestos función de verdad, asignando valores de verdad a sus enunciados componentes simples, de modo que las premisas se hicieran verdaderas y la conclusión, falsa. Usamos un método muy relacionado para demostrar la invalidez de argumentos inválidos que contienen cuantificadores. El método de demostración de invalidez que a continuación describimos está ligado a nuestro supuesto básico de que existe al menos un individuo.

El supuesto de que existe al menos, un individuo, podría satisfacerse de una infinidad de maneras diferentes: si existe exactamente un individuo, si existen exactamente dos individuos, si existen exactamente tres individuos, etc.... Para cada uno de esos casos hay una equivalencia lógica estricta entre proposiciones generales no compuestas y composiciones, de función de verdad, de proposiciones singulares. Si hay exactamente un individuo, digamos a, entonces

$$[(x)\Phi x] \equiv \Phi a \quad \text{y} \quad [(\exists x)\Phi x] \equiv \Phi a$$

Si hay exactamente dos individuos, digamos a y b, entonces

$$[(x)\Phi x] \equiv [\Phi a \cdot \Phi b] \quad \text{y} \quad [(\exists x)\Phi x] \equiv [\Phi a \vee \Phi b]$$

Y para cualquier número k, si hay exactamente k individuos, digamos $a, b, c, \ldots, k$, entonces

$$[(x)\Phi x] \equiv [\Phi a \cdot \Phi b \cdot \Phi c \cdot \ldots \cdot \Phi k]$$

y

$$[(\exists x)\Phi x] \equiv [\Phi a \vee \Phi b \vee \Phi c \vee \ldots \vee \Phi k]$$

La verdad de estos bicondicionales es una consecuencia inmediata de nuestra definición de los cuantificadores universal y existencial. Ningún uso se hace aquí de las cuatro reglas de cuantificación presentadas en la sección precedente. Así, para cualquier posible universo no vacío o modelo que contenga un número finito cualquiera de individuos, cada proposición general es lógicamente equivalente a algún compuesto función de verdad de proposiciones singulares. Así, para cualquier modelo tal cada argumento que involucra cuantificadores es lógicamente equivalente a algún argumento que sólo contiene proposiciones singulares compuestas función de verdad de las mismas.

Un argumento que involucra cuantificadores es válido si y sólo si es válido no importando cuántos individuos hay, siempre que haya cuando menos uno. Así, un argumento que involucra cuantificadores es válido si y sólo si para todo posible universo o modelo no vacío es lógicamente equivalente a un argumento de función de verdad que es válido. Así, podemos demostrar la invalidez de un argumento dado, exhibiendo o describiendo un modelo para el cual el argumento dado es lógicamente equivalente a un argumento *inválido* de función de verdad. Esto podemos lograrlo traduciendo el argumento dado que involucra cuantificadores en un argumento lógicamente equivalente que sólo involucra proposiciones singulares y composiciones función de verdad de las mismas, y usando entonces el método de asignar valores de verdad para demostrar la invalidez del último. Por ejemplo, dado el argumento

Todas las ballenas son pesadas.
Todos los elefantes son pesados.
Luego, todas las ballenas son elefantes.

primeramente lo simbolizamos como

$$(x)[Wx \supset Hx]$$
$$(x)[Ex \supset Hx]$$
$$\therefore (x)[Wx \supset Ex]$$

En el caso de un modelo que contiene exactamente un individuo, digamos a, el argumento dado es lógicamente equivalente a

$$Wa \supset Ha$$
$$Ea \supset Ha$$
$$\therefore Wa \supset Ea$$

que se demuestra inválido asignando el valor de verdad **T** a "Wa" y "Ha" y **F** a "Ea". (Esta asignación de valores de verdad es un método abreviado de describir el modelo en cuestión como uno que contiene solamente el único individuo a que es un W (una ballena) y H (pesado), pero no E (un elefante).)[6] Luego, el argumento original no es válido para un modelo que contenga exactamente un individuo, y es, por lo tanto, *inválido*.

Hay que enfatizar que al demostrar la invalidez de argumentos que involucran cuantificadores *no se hace uso de nuestras reglas de cuantificación*. Para un modelo que sólo contenga el individuo a no *inferimos* el enunciado "$Wa \supset Ha$" del enunciado "$(x)[Wx \supset Hx]$" por **UI**; esos dos enunciados son lógicamente equivalentes para ese modelo porque en el mismo "$Wa \supset Ha$" es la *única* instancia de sustitución de la función proposicional "$Wx \supset Hx$".

[6] Aquí suponemos que las funciones proposicionales simples "Ax", "Bx", "Cx" ... no son ni necesarias, esto es, lógicamente verdaderas, para todos los individuos (por ejemplo, x es idéntico a sí mismo), ni imposibles, esto es, lógicamente falsas para todos los individuos (por ejemplo, X es diferente de sí mismo). También suponemos que las únicas relaciones lógicas entre las funciones proposicionales simples son las afirmadas o lógicamente implicadas por las premisas del argumento que se demuestra inválido. El propósito de estas restricciones es permitir la asignación arbitraria de valores de verdad a las instancias de sustitución de estas funciones proposicionales simples sin inconsistencia, pues nuestras descripciones por modelos deben, desde luego, ser consistentes.

Puede ocurrir que un argumento inválido que involucra cuantificadores sea lógicamente equivalente, para cualquier modelo que exactamente contenga un individuo, a un argumento válido función de verdad, aunque será equivalente, para todo modelo que contenga más de un individuo, a un argumento inválido función de verdad. Por ejemplo, consideramos el argumento.

Todas las ballenas son pesadas.
Algunos elefantes son pesados.
Por lo tanto, todas las ballenas son elefantes.

que se simboliza como

$$(x)[Wx \supset Hx]$$
$$(\exists x)[Ex \cdot Hx]$$
$$\therefore (x)[Wx \supset Ex]$$

Para un modelo que sólo contiene un individuo *a* este argumento es lógicamente equivalente a

$$Wa \supset Ha$$
$$Ea \cdot Ha$$
$$\therefore Wa \supset Ea$$

que es un argumento válido. Pero para un modelo que consiste en los dos individuos *a* y *b*, el argumento dado es lógicamente equivalente a

$$(Wa \supset Ha) \cdot (Wb \supset Hb)$$
$$(Ea \cdot Ha) \vee (Eb \cdot Hb)$$
$$\therefore (Wa \supset Ea) \cdot (Wb \supset Eb)$$

que se demuestra inválido asignando el valor de verdad **T** a "*Wa*", "*Wb*", "*Ha*", *Hb*", "*Eb*", y el valor de verdad **F** a "*Ea*". Luego, el argumento original es inválido, porque hay un modelo en el que es lógicamente equivalente a un argumento función de verdad inválido. Otra ilustración es

Algunos perros son perros de aguas.
Algunos perros son perros de punta y vuelta.
Luego, algunos perros de aguas son de punta y vuelta.

que simbolizamos como

$$(\exists x)[Dx \cdot Px]$$
$$(\exists x)[Dx \cdot Sx]$$
$$\therefore (\exists x)[Px \cdot Sx]$$

Para un modelo que contenga el individuo a es lógicamente equivalente a

$$\begin{array}{l} Da \cdot Pa \\ Da \cdot Sa \\ \therefore Pa \cdot Sa \end{array}$$

que es válido. Pero para un modelo que consiste en los dos individuos a y b es equivalente a

$$\begin{array}{l} (Da \cdot Pa) \vee (Db \cdot Pb) \\ (Da \cdot Sa) \vee (Db \cdot Sb) \\ \therefore (Pa \cdot Sa) \vee (Pb \cdot Sb) \end{array}$$

que se demuestra inválido asignando el valor de verdad **T** a "*Da*", "*Db*", "*Pa*", "*Sb*" y el valor de verdad **F** a "*Pb*" y "*Sa*". Aquí también el argumento original es inválido pero hay un modelo para el cual es lógicamente equivalente a un argumento función de verdad inválido.

Un argumento inválido que involucra cuantificadores puede ser válido para cualquier modelo que contenga menos de k individuos, aunque sea inválido para todo modelo que contenga k o más individuos. Así, al usar este método para demostrar la invalidez de un argumento que involucra cuantificadores podría ser necesario considerar modelos más y más grandes. Se plantea naturalmente la pregunta: ¿qué tan grande debe ser el modelo considerado al tratar de demostrar la invalidez de un argumento de este tipo? Se ha encontrado una respuesta teóricamente satisfactoria a esta pregunta. Si un argumento contiene n símbolos de predicados diferentes, entonces, si es válido para un modelo que contenga 2^n individuos, entonces es válido en cualquier modelo, o universalmente válido.[7] Este resultado sólo vale para las funciones proposicionales de una variable, y no es verdadero para los predicados relacionales discutidos en el Cap. 5. Aunque teóricamente satisfactoria, esta solución no es de mucha ayuda en la práctica. Yendo directamente al caso técnicamente crucial para decidir la validez o invalidez de cualquiera de los argumentos ya considerados en esta sección deberíamos considerar modelos conteniendo ocho individuos. Y para algunos de los ejercicios siguientes el caso teóricamente crucial será un modelo con $2^8 = 256$ individuos. Sin embargo, ninguno de los siguientes ejercicios requiere la consideración de modelos que contengan más de tres individuos para demostrar su invalidez.

---

[7] Ver Paul Bernays y Moses Schönfinkel, "Zum Entscheidungsproblem der mathematischen Logik", *Mathematische Annalen*, Vol. 99 (1928), y Wilhelm Ackermann, *Solvable Cases of the Decision Problem*, Amsterdam, 1954, Cap. IV.

EJERCICIOS

I. Demuestre que cada uno de los siguientes argumentos es inválido:

*1. $(\exists x)[Ax \cdot Bx]$
Ac
$\therefore Bc$

2. $(x)[Cx \supset \sim Dx]$
$\sim Cj$
$\therefore Dj$

3. $(x)[Ex \supset Fx]$
$(x)[Gx \supset Fx]$
$\therefore (x)[Ex \supset Gx]$

4. $(x)[Hx \supset \sim Ix]$
$(\exists x)[Jx \cdot \sim Ix]$
$\therefore (x)[Hx \supset Jx]$

*5. $(\exists x)[Kx \cdot Lx]$
$(\exists x)[\sim Kx \cdot \sim Lx]$
$\therefore (\exists x)[Lx \cdot \sim Kx]$

6. $(x)[Mx \supset (Nx \cdot Ox)]$
$(\exists x)[Px \cdot Nx]$
$(\exists x)[Px \cdot \sim Ox]$
$\therefore (x)[Mx \supset \sim Px]$

7. $(x)[Qx \supset (Rx \cdot Sx)]$
$(\exists x)[Tx \cdot Rx]$
$(\exists x)[Tx \cdot \sim Sx]$
$\therefore (x)[Qx \supset Tx]$

8. $(x)[Ux \supset (Vx \supset Wx)]$
$(x)[Vx \supset (Ux \supset \sim Wx)]$
$(\exists x)[Ux \cdot Wx]$
$\therefore (\exists x)[Ux \cdot Vx]$

9. $(\exists x)[Xx \cdot Yx]$
$(x)[Xx \supset Zx]$
$(\exists x)[Zx \cdot \sim Xx]$
$\therefore (\exists x)[Zx \cdot \sim Yx]$

10. $(x)[Ax \supset Bx]$
$(\exists x)[Cx \cdot Bx]$
$(\exists x)[Cx \cdot \sim Bx]$
$\therefore (x)[Ax \supset Cx]$

II. Demostrar que cada uno de los argumentos siguientes es inválido:

*1. Todos los astronautas son valientes. Jaime es valiente. Luego Jaime es un astronauta.
2. Ningún vaquero es un novato. Bill no es un novato. Luego, Bill es un vaquero.
3. Todas las siemprevivas son fragantes. Algunos árboles de chicle no son fragantes. Luego, algunas siemprevivas no son árboles de chicle.
4. Todos los paganos son idólatras. Ningún pagano es alegre. Luego ningún idólatra es alegre.
*5. No hay gatitos grandes. Algunos mamíferos son grandes. Luego los gatitos no son mamíferos.
6. Todos los novelistas son observadores. Algunos poetas no son observadores. Por lo tanto, ningún novelista es poeta.
7. Todos los hombres de estado son inteligentes. Algunos políticos son inteligentes. No todos los políticos son inteligentes. Luego ningún estadista es político.
8. Todos los estadistas son inteligentes. Algunos políticos son inteligentes. No todos los políticos son inteligentes. Luego, todos los estadistas son políticos.
9. Todos los hombres de estado son políticos. Algunos hombres de estado son inteligentes. Algunos políticos no son hombres de estado. Luego, algunos políticos no son inteligentes.
10. Los caballos y las vacas son mamíferos. Algunos animales son mamíferos. Algunos animales no son mamíferos. Luego todos los caballos son animales.

III. Demostrar la validez o invalidez de cada uno de los argumentos:

*1. Todos los aviadores son valientes. James es valiente. Luego James es un aviador.

2. Todos los investigadores son joviales. Smith es investigador. Luego Smith es jovial.

3. Ningún educador es tonto. Todos los apostadores son tontos. Luego ningún educador es apostador.

4. Ningún historiador es analfabeto. Todos los analfabetos son marginados. Luego ningún historiador es marginado.

*5. Sólo los ciudadanos votan. No todos los residentes son ciudadanos. Luego algunos residentes no votan.

6. Sólo los ciudadanos votan. No todos los ciudadanos son residentes. Luego algunos que votan no son residentes.

7. Los automóviles y los furgones son vehículos. Algunos autos son Ford. Algunos automóviles son camiones. Todos los camiones son vehículos. Luego algunos Ford son camiones.

8. Los automóviles y los furgones son vehículos. Algunos automóviles son Ford. Algunos automóviles son camiones. Todos los vehículos son camiones. Luego algunos Ford son camiones.

9. Los automóviles y los furgones son vehículos. Algunos automóviles son Ford. Algunos automóviles son camiones. Algunos furgones no son vehículos. Luego algunos Ford son camiones.

*10. Todos los tenores son u obesos o afeminados. Ningún tenor obeso es afeminado. Algunos tenores son afeminados. Luego algunos tenores son obesos.

11. Todos los tenores o son obesos o son afeminados. Ningún tenor obeso es afeminado. Algunos tenores son afeminados. Luego algunos tenores no son obesos.

12. Ningún solicitante será contratado o considerado si es o inexperimentado o sin entrenamiento. Algunos solicitantes son novatos inexperimentados. Todos los solicitantes que son mujeres se sentirán decepcionados si no son contratados. Todo solicitante es una mujer. Algunas mujeres serán contratadas. Luego algunos solicitantes se sentirán decepcionados.

13. Ningún candidato será elegido o llamado si es o liberal o radical. Algunos candidatos son liberales ricos. Todos los candidatos que son políticos se sentirán decepcionados si no son elegidos. Todo candidato es un político. Algunos políticos son elegidos. Luego algunos candidatos no se sentirán decepcionados.

14. Los abates y los obispos son clérigos. Ningún miembro del clero es desaliñado o elegante. Algunos obispos son elegantes y fastidiosos. Algunos abates no son fastidiosos. Luego, algunos abates son desaliñados.

15. Los abates y los obispos son clérigos. Ningún clérigo es desaliñado y elegante. Algunos obispos son elegantes y fastidiosos. Algunos abates no son fastidiosos. Luego algunos abates no son desaliñados.

4.4. Proposiciones Múltiplemente Generales

Hasta este punto hemos limitado nuestra atención a las proposiciones generales que contienen un solo cuantificador. Una proposición general que exactamente contenga un cuantificador se dice que es *singularmente* general. Ahora estudiaremos las proposiciones *múltiplemente* generales, que contienen dos o más cuantificadores. En nuestro uso del término, todo enunciado compuesto cuyos componentes sean proposiciones generales deberá considerarse como una proposición múltiplemente general. Por ejemplo, el condicional "Si todos los perros son carnívoros, entonces algunos animales son canívoros" que simbolizamos como "$(x)[Dx \supset Cx] \supset (\exists\ x)[Ax \cdot Cx]$", es una proposición múltiplemente general. Otras proposiciones múltiplemente generales son más complejas y requieren de una notación más complicada. Para desarrollar la nueva notación debemos volver a la noción de una función proposicional.

Todas las funciones proposicionales consideradas hasta este punto, tenían como instancias de sustitución, o proposiciones singulares o composiciones función de verdad de proposiciones singulares con los mismos términos sujetos. Si consideramos un enunciado compuesto cuyos componentes son proposiciones singulares con *diferentes* términos sujetos, tal como "$Fa \cdot Gb$" podemos considerarla como una instancia de sustitución de la función proposicional "$Fx \cdot Gb$" o de la función proposicional "$Fa \cdot Gx$". Vemos que algunas funciones proposicionales pueden contener proposiciones singulares como partes. Si consideramos un enunciado compuesto del cual un componente es una proposición general y el otro una proposición singular, tal como "Si todos los perros son carnívoros, entonces Rover es carnívoro" que se simboliza "$(x)[Dx \supset Cx] \supset Cr$" podemos considerarla como instancia de sustitución de la función proposicional "$(x)[Dx \supset Cx] \supset Cx$". Vemos pues que algunas funciones proposicionales pueden contener proposiciones generales como partes.

En este punto se pueden propiamente introducir dos nuevos términos técnicos. Una ocurrencia de la variable x que no ocurre dentro, o que no se encuentra dentro del alcance de un cuantificador universal o existencial[8] "(x)" o "$(\exists x)$" se llamará una *ocurrencia libre* de esa variable. Por otro lado, una ocurrencia de la variable x que es o parte de un cuantificador o se haya dentro del alcance de un cuantificador "(x)" o "$(\exists x)$" se llamará una *ocurrencia ligada* de esa variable.[9] Así, en la expresión "$(x)[Dx \supset Cx] \supset Cx$" la pri-

[8] Como se explicó en la Pág. 91 en este mismo capítulo.

[9] Otra nomenclatura no tan común se refiere a las variables libres como variables "reales", y a las variables ligadas como variables "aparentes".

mera ocurrencia de la variable "x" es *parte de un cuantificador* y, por lo tanto, se considera *ligada*. También la segunda y tercera ocurrencias son ligadas. Pero la cuarta ocurrencia es una ocurrencia libre. Vemos que las funciones proposicionales pueden tener tanto ocurrencias libres como ocurrencias ligadas de las variables; por otro lado, toda ocurrencia de una variable, en una proposición, debe ser ligada, pues toda proposición o es verdadera o es falsa. Una función proposicional debe al menos contener una ocurrencia libre de una variable, pero ninguna proposición puede contener ocurrencias libres de ninguna variable.

La proposición "$Fa \cdot Gb$" puede también ser considerada como instancia de sustitución de "$Fx \cdot Gy$" donde la última es una funcional proposicional que contiene *dos variables diferentes*. Hasta el momento, hemos admitido explícitamente sólo una variable individual, la letra "x". Sin embargo, con nuestro *uso* previo de la letra "y" para denotar *cualquier* individuo *arbitrariamente elegido*, estábamos de hecho usándola como variable sin admitir ese hecho. Y al introducir una letra por **EI** para denotor *algún* individuo *particular* que tuviese un atributo especificado sin realmente saber *cuál* individuo era el denotado, estábamos de hecho usando también esa letra como variable. Ahora procedemos a reconocer explícitamente lo que había implícito en nuestro uso anterior. Algunas funciones proposicionales pueden contener dos o más variables individuales diferentes. Será conveniente disponer de una mayor provisión de variables, de modo que se reajusta nuestra notación convenida para incluir las letras "u", "v", "w", "x", "y" y "z" como variables individuales. Ahora las funciones proposicionales incluyen expresiones como "Fu", "$Fu \vee Gw$", "$(Fx \cdot Gy) \supset Hz$", "$Fx \vee (Gy \cdot Hx)$" y similares.

Al reemplazar variables por constantes para obtener una proposición a partir de una función proposicional la misma constante debe reemplazar cada ocurrencia libre de la misma variable. Así, entre las instancias de sustitución de la función proposicional "$Fx \vee (Gy \cdot Hx)$" están

$$Fa \vee (Gb \cdot Ha),\ Fa \vee (Gc \cdot Ha),\ Fa \vee (Gd \cdot Ha), \ldots$$
$$Fb \vee (Ga \cdot Hb),\ Fb \vee (Gc \cdot Hb),\ Fb \vee (Gd \cdot Hb), \ldots$$
$$Fc \vee (Ga \cdot Hc),\ Fc \vee (Gb \cdot Hc),\ Fc \vee (Gd \cdot Hc), \ldots.$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

pero *no* proposiciones tales como "$Fa \vee (Gb \cdot Hc)$". Por otro lado, la *misma* constante puede reemplazar ocurrencias libres de *diferentes* variables a condición de que si reemplaza cualquier ocurrencia libre de una variable debe reemplazar todas las ocurrencias libres de esa variable. De modo que otras instancias de sustitución de la función proposicional. "Fx v $(Gy \cdot Hx)$" son "Fa v $(Ga \cdot Ha)$", "Fb v $(Gb \cdot Hb)$", "Fc v $(Gc \cdot Hc)$", . . .

Habiendo admitido las letras "u", "v", "w", "y" y "z" como variables individuales, además de "x", ajustamos ahora nuestra notación para que la cuantificación existencial y universal se conforme a nuestra provisión aumentada de variables. La proposición "Todos los F son G" puede simbolizarse alternativamente como "$(u)[Fu \supset Gu]$", "$(v)[Fv \supset Gv]$", "$(w)[Fw \supset Gw]$", "$(x)[Fx \supset Gx]$", "$(y)[Fy \supset Gy]$", o "$(z)[Fz \supset Gz]$". De manera similar, la proposición "Hay algunos H" puede simbolizarse alternativamente como "$(\exists u)Hu$", "$(\exists v)Hv$", "$(\exists w)Hw$", "$(\exists x)Hx$", "$(\exists y)Hy$", o "$(\exists z)Hz$". La diferencia entre "$(x)Fx$" y "$(y)Fy$" (así como entre "$(\exists x)Gx$" y "$(\exists y)Gy$") es puramente de notación y cualquiera podría escribirse en lugar de la otra dondequiera que se presente. Desde luego que si una función proposicional contiene ocurrencias libres de dos o más variables diferentes, tal como "$Fx \cdot Gy$", las dos funciones proposicionales que resultan al cuantificarla como

$$(x)[Fx \cdot Gy] \quad \text{y} \quad (y)[Fx \cdot Gy]$$

son realmente muy diferentes y su diferencia es más que de notación. Las instancias de sustitución de la primera son

$$(x)[Fx \cdot Ga],\ (x)[Fx \cdot Gb],\ (x)[Fx \cdot Gc], \ldots$$

mientras que las instancias de sustitución de la segunda son

$$(y)[Fa \cdot Gy],\ (y)[Fb \cdot Gy],\ (y)[Fc \cdot Gy], \ldots$$

Si cada individuo tiene el atributo F, y algunos pero no todos los individuos tienen el atributo G, entonces algunas instancias de sustitución de la primera serán proposiciones verdaderas, mientras que todas las instancias de sustitución de la segunda serán falsas, una diferencia considerable. Este ejemplo debiera servir para indicar la necesidad de hablar no de "*la* cuantificación universal (o existencial) de una función proposicional" sino de "la cuantificación universal (o existencial) de una función proposicional *con respecto a la variable* "x" ", o "la cuantificación universal (o existencial) de una función proposicional *con respecto a la variable* "y" ", y así sucesivamente.

Debiera ser claro que por ser "$(x)[Fx \supset Gx]$" y "$(y)[Fy \supset Gy]$" traducciones alternativas de la proposición "Todo lo que sea un F es también un G", la cuantificación universal de "$Fx \supset Gx$" con respecto a "x" tiene el mismo significado que, y es lógicamente equivalente a, la cuantificación universal con respecto a "y" de la función proposicional que resulta al reemplazar todas las ocurrencias libres de "x" en la "$Fx \supset Gx$" por "y" —pues lo que resulta de hacer este reemplazo es "$Fy \supset Gy$"—. En las primeras etapas de nuestro trabajo será deseable tener a lo más una cuantificación con respecto a una variable dada en una proposición sencilla. Esto no es estrictamente *necesario* pero es útil para evitar confusiones. Así, la primera proposición múltiplemente general que se consideró "Si todos los perros son carnívoros, entonces algunos animales son carnívoros" se simboliza mejor como "$(x)[Dx \supset Cx] \supset (\exists y)[Ay \cdot Cy]$" que como "$(x)[Dx \supset Cx] \supset (\exists x)[Ax \cdot Cx]$" aunque ninguna de las dos es *incorrecta*.

Se ha observado que ninguna proposición puede contener ninguna ocurrencia libre de variable alguna. Así, al simbolizar cualquier proposición se tendrá cuidado de que toda ocurrencia de toda variable usada esté dentro del alcance de un cuantificador respecto a esa variable. Algunos ejemplos aclararán el asunto. La proposición

Si algo anda mal en la casa entonces todos los de la casa se quejan.

se simboliza propiamente como un condicional cuyo antecedente y consecuente contienen cuantificadores diferentes:

$(\exists x)[x$ anda mal en la casa$] \supset (y)$ $[(y$ es una persona de la casa$) \supset (y$ se queja$)]$

Aquí el cuantificador inicial no se extiende más allá del signo principal de implicación. Pero si ahora leemos otra proposición que tiene un parecido superficial con la primera:

Si algo anda mal entonces debiera rectificarse.

sería *incorrecto* simbolizarla como

$(\exists x)[x$ anda mal$] \supset (x$ debiera rectificarse$)$

Puesto que al terminar el alcance del cuantificador inicial en el signo de implicación, la ocurrencia de "x" en el *consecuente* no puede referirse hacia atrás al cuantificador inicial, pues no está ya dentro de su alcance. Tenemos aquí la ocurrencia libre de una variable, lo que significa que la simbolización propuesta no es una proposición y, por lo tanto, no es una traducción adecuada del enunciado dado. El error no se corregirá *simplemente* por extensión del alcance del cuantificador inicial, por reinstalación de los corchetes, pues la expresión simbólica

$(\exists x)[(x$ anda mal$) \supset (x$ debiera rectificarse$)]$.

aunque es una proposición, no tiene el mismo significado que la proposición original en español. En lugar de ese significado, solamente dice que existe al menos una cosa que debiera rectificarse si anda mal, pero el sentido de la oración en español claramente es que *cualquier* cosa que ande mal debiera rectificarse. Luego, una simbolización correcta no es ninguna de las anteriores sino

$(x)[(x \text{ anda mal}) \supset (x \text{ debiera rectificarse})]$.

La situación es más complicada, pero no es diferente, en principio, cuando un cuantificador ocurre *dentro del alcance de otro cuantificador*. Aquí hay que dar el mismo aviso contra las variables "en el aire"* o no cuantificadas. La proposición

Si algo falta entonces si nadie llama a la policía, habrá un descontento

propiamente se simboliza como

$$(\exists x)[x \text{ falta}] \supset \{(y)[(y \text{ es una persona}) \supset \sim (y \text{ llama la policía})] \supset (\exists z)[(z \text{ es una persona}) \cdot (z \text{ quedará descontento})]\}.$$

Pero la siguiente proposición, que superficialmente es análoga a la precedente:

Si algo falta entonces si nadie llama a la policía, no será recuperado.

no se debe simbolizar como

$$(\exists x)[x \text{ falta}] \supset \{(y)[(y \text{ es una persona}) \supset \sim(y \text{ llama a la policía})] \supset \sim(x \text{ será recuperado})\}$$

pues la última ocurrencia de la variable "x" está fuera del alcance del cuantificador inicial, quedándose "en el aire". No se le puede corregir por simple reescritura de los corchetes como

$$(\exists x)\{(x \text{ falta}) \supset \{(y)[(y \text{ es una persona}) \supset \sim(y \text{ llama a la policía})] \supset \sim(x \text{ será recuperado})\}\}$$

pues esta expresión tampoco preserva el sentido de la oración dada, como en el ejemplo anterior. Ese sentido queda expresado por la forma

$$(x)\{(x \text{ falta}) \supset \{(y)[(y \text{ es una persona}) \supset \sim(y \text{ llama a la policía})] \supset \sim(x \text{ será recuperado})\}\}$$

que es, por lo tanto, una simbolización correcta de la proposición dada.

EJERCICIOS

Simbolizar cada una de las proposiciones siguientes usando en cada caso la notación sugerida, de modo que la fórmula simbólica sea lo más próxima posible a la expresión en español:

*1. Si algo se descompone alguien será culpado. (Dx: x se descompone. Px: x es una persona. Bx: x será culpado.)

* Variables "colgando" o "bailando". (N. del T.)

2. Si algo se daña el inquilino tendrá que pagarlo. (Dx: x se daña. Cx: x se cobrará al inquilino.)
3. Si nada se descompone nadie será culpado. (Dx: x se descompone. Px: x es una persona. Cx: x será culpado.)
4. Si algo se daña, pero no se culpa a nadie, el inquilino no tendrá que pagar. (Dx: x se daña. Px: x es una persona. Cx: x es culpado.)
*5. Si cualesquier plátanos están amarillos, entonces están maduros. (Bx: x es un plátano. Yx: x es amarillo. Rx: x está maduro.)
6. Si hay plátanos amarillos, entonces algunos plátanos están maduros. (Px: x es un plátano. Ax: x está amarillo. Mx: x está maduro.)
7. Si hay plátanos amarillos, entônces si todos los plátanos amarillos están maduros, están maduros. (Px: x es un plátano. Ax: x está amarillo. Mx: x está maduro.)
8. Si todos los plátanos maduros son amarillos, entonces algunas cosas amarillas están maduras. (Mx: x está maduro. Px: x es un plátano. Ax: x es amarillo.)
9. Si todos los oficiales presentes son o capitanes o mayores, entonces o están presentes algunos capitanes o están presentes algunos mayores. (Ox: x es un oficial. Px: x está presente. Cx: x es un capitán. Mx: x es un mayor.)
*10. Si hay algún oficial presente, entonces, o no hay mayores o él es un mayor. (Ox: x es un oficial. Px: x está presente. Mx: x es un mayor.)
11. Si algunos oficiales están presente y si todos los oficiales presentes son capitanes, entonces algunos capitanes están presentes. (Ox: x es un oficial. Px: x está presente. Cx: x es un capitán.)
12. Si algunos oficiales están presentes, entonces si todos los oficiales presentes son capitanes, entonces son capitanes. (Ox: x es un oficial. Px: x está presente. Cx: x es un capitán.)
13. Si todos los sobrevivientes son afortunados y si sólo las mujeres sobrevivieron, entonces si hay sobrevivientes, entonces algunas mujeres son afortunadas. (Sx: x es un sobreviviente. Ax: x es afortunado. Mx: x es mujer.)
14. Si cualesquier sobrevivientes son mujeres, entonces si todas las mujeres son afortunadas, son afortunadas. (Sx: x es un sobeviviente. Mx: x es una mujer. Ax: x es afortunado.)
*15. Si hay sobrevivientes y sólo las mujeres fueron sobrevivientes, entonces son mujeres. (Sx: x es un sobreviviente. Wx: x es mujer.)
16. Si toda posición tiene un futuro y no hay empleados flojos, entonces algunos empleados tendrán éxito. (Px: x es una posición. Fx: x tiene un futuro. Ex: x es un empleado.) Lx: x es flojo. Tx: x tendrá éxito.)
17. Si algunos empleados son flojos entonces si algunas posiciones no tienen futuro entonces no tendrán éxito (Ex: x es un empleado Fx: x es flojo. Px: x es una posición. Tx: x tiene futuro. Sx: x tendrá éxito.)
18. Si cualesquier empleados son flojos y algunas posiciones no tienen futuro entonces algunos empleados no tendrán éxito. (Ex: x es un empleado Fx: x es flojo. Px: x es una posición. Lx: x tienen futuro. Sx: x tendrá éxito.)
19. Si cualquier marido fracasa, entonces, si todas las esposas son ambiciosas entonces algunas esposas estarán decepcionadas. (Mx: x es un marido. Ex: x tiene éxito. Ax: x es ambiciosa. Dx: x será decepcionada.)

20. Si algún marido fracasa, entonces, si algunas esposas son ambiciosas, él se sentirá infeliz. (Mx: x es un marido, Fx: x no fracasa. Ex: x es una esposa. Ax: x es ambiciosa. Ix: x se sentirá infeliz.)

4.5. Reglas de Cuantificación

1. Inferencias que Involucran Funciones Proposicionales. Al construir una demostración formal de validez para un argumento dado, las premisas con que empezamos y la conclusión con que terminamos son proposiciones. Pero donde se utilicen reglas de la Instanciación Existencial o de la Generalización Universal algunos de los renglones intermedios deberán contener variables libres, y serán funciones proposicionales y no proposiciones. Cada renglón de una demostración formal de validez debe, o ser una premisa o un supuesto de alcance limitado, o seguirse válidamente de los renglones precedentes por medio de una forma de argumento válido elemental aceptada como Regla de Inferencia o seguirse por una secuencia de pasos como los anteriores como por el principio de Demostración Condicional. Surgen naturalmente tres preguntas en este momento: ¿En qué sentido puede decirse que una función proposicional *válidamente* se sigue de otras funciones proposicionales? ¿En qué sentido puede decirse que una función proposicional *válidamente* se sigue de ciertas proposiciones?; ¿y en qué sentido puede decirse que una proposición *válidamente* se sigue de funciones proposicionales?

Para contestar estas preguntas es útil introducir un sentido más general y revisado de la palabra "válido". Las funciones proposicionales contienen variables libres y, por lo tanto, no son ni verdaderas ni falsas. Pero una función proposicional se convierte en una proposición reemplazando todas sus variables libres por constantes y la instancia de sustitución que así resulta o es verdadera o es falsa. Una función proposicional puede decirse que se sigue *válidamente* como conclusión de una o más funciones proposicionales tomadas como premisas cuando cualquier reemplazo de las ocurrencias libres de las variables por constantes (siendo las mismas constantes las que reemplazan a las mismas variables en premisas y conclusión, desde luego) da lugar a un argumento válido. Así, por ejemplo, la función proposicional "Gx" se sigue válidamente de las funciones proposicionales "$Fx \supset Gx$" y "Fx", porque todo reemplazo de "x" por una constante da un argumento de la forma *Modus Ponens*. Podemos decir de tal inferencia que es válida por *Modus Ponens* a pesar de que lo involucrado son funciones proposicionales y no proposiciones. Debiera estar claro que cualquier inferencia es válida si procede por cualquiera de las 19 Reglas de Inferencia de nuestra lista original, independientemente de que las premisas y conclusión sean proposiciones o funciones proposicionales. Nótese de pasada, que esto es así, aun cuando la conclusión contenga más variables libres que las premisas, como cuando por el principio de adición válidamente inferimos la función proposicional de dos variables "*Fx* v *Gy*" de la función proposicional de una variable "*Fx*".

La lista original de diecinueve Reglas de Inferencia también permite la inferencia de funciones proposicionales a partir de proposiciones, como cuando por el principio de Adición inferimos la función proposicional "*Fa* v *Gx*" a partir de la proposición "*Fa*". Es obvio que tales inferencias son válidas en el nuevo sentido explicado. Más aún, se pueden inferir válidamente proposiciones a partir de funciones proposicionales por nuestras Reglas de Inferencia, así como cuando por el principio de Simplificación inferimos la proposición "*Fa*" a partir de la función proposicional "*Fa* · *Gx*". Luego, las letras "*p*", "*q*", "*r*", "*s*" en nuestras diecinueve Reglas de Inferencia ahora corren sobre, o representan, *o* proposiciones *o* funciones proposicionales.

Ahora podemos adoptar una definición más general de demostración formal de validez, que corre paralela a nuestra definición anterior, excepto en que los renglones de una demostración pueden ser o proposiciones o funciones proposicionales. Si cada renglón siguiendo a las premisas iniciales válidamente se sigue de los renglones que le preceden en el sentido generalizado del término "válido" que hemos explicado, entonces el último renglón válidamente se infiere de las premisas iniciales. Y si nuestras premisas iniciales y nuestra conclusión son proposiciones y no funciones proposicionales, entonces la conclusión válidamente se sigue de las premisas iniciales en el sentido original del término "válido" que se aplica a argumentos cuyas premisas y conclusiones todas son enunciados o proposiciones. Esto puede verse mediante las consideraciones que damos a continuación. Al pasar de nuestras premisas originales a funciones proposicionales, si lo hacemos válidamente, entonces, si las premisas son verdaderas, todas las instancias de sustitución de las funciones proposicionales inferidas también deben ser verdaderas. Y al pasar de las funciones proposicionales, si lo hacemos válidamente, entonces todas las instancias de sustitución de las últimas también deben ser verdaderas. Finalmente, cuando pasamos de funciones proposicionales inferidas válidamente a la conclusión final que es una proposición, entonces, si lo hacemos válidamente, como todas las instancias de sustitución de las anteriores son verdaderas la conclusión final debe ser verdadera también.

Las observaciones anteriores requieren alguna modificación para tomar en cuenta los supuestos de alcance limitado que contienen variables libres, pero las modificaciones se introducen mejor como alteraciones en las reglas de cuantificación mismas. Las versiones preliminares de nuestras reglas de cuantificación han de reemplazarse en todo caso, pues como se dijo, sólo se aplican a las proposiciones y no a las funciones proposicionales. Las dos reglas de generalización, **UG** y **EG** deben ahora permitir la cuantificación (o ligazón) de las variables libres, mientras que las reglas de instanciacion **UI** y **EI** deben ahora permitir que se liberen las variables ligadas para permitir la introducción de funciones proposicionales más que las (pretendidas) instancias de sustitución de ellas.

En nuestra discusión anterior de las funciones proposicionales (de la única variable "x") introdujimos las letras griegas Φ y Ψ, y con "Φx" y "Ψx" denotamos cualquier función proposicional de "x" tal como "Fx", "Gx", "$Fx \cdot Hx$", "$(Fx \vee Gx) \supset Hx$", ... sin importar qué tan complicadas puedan ser estas funciones. Será útil continuar usando las letras griegas, dejando "Φx" para denotar cualquier función proposicional que contenga a lo menos una ocurrencia libre de la variable "x", incluyendo aun aquellas funciones proposicionales que contienen ocurrencias libres de otras variables. Entonces "Φx" puede denotar cualquiera de las siguientes:

$$Fx,\ Fx \vee Gx,\ Ga \supset Hx,\ Fw \cdot Fx,\ (\exists z)[Gz \equiv Hx],\ \ldots$$

De manera semejante, "Φy" puede denotar cualquiera de las funciones proposicionales

$$Fy,\ Fy \vee Gy,\ Ga \supset Hy,\ Fw \cdot Fy,\ (\exists z)[Gz \equiv Hy],\ \ldots$$

Para podernos referir a *cualquier* función proposicional *en cualquiera* de los grupos precedentes, será conveniente introducir las letras griegas *mu* y *nu* ("μ" y "ν") para denotar símbolos individuales. De este modo, "$\Phi\mu$" puede denotar cualquiera de las funciones proposicionales precedentes, ya sea de "x" o "y" según que "μ" se tome como denotando "x" o "y". De manera semejante, según que "μ" se tome cómo denotando "x" o "y", "$(\mu)\Phi\mu$" denotará la cuantificación universal con respecto a "x" o "y" de cualquiera de las funciones proposicionales que preceden, de "x" o "y" y "$(\exists\mu)\Phi\mu$" denotará la cuantificación existencial.

Es conveniente permitir que "$\Phi\mu$" denote también o una proposición o una función proposicional que *no* contenga ocurrencia libre de la variable denotada por "μ". En tal caso $(\mu)\Phi\mu$ y $(\exists\mu)\Phi\mu$ se llamarán cuantificaciones "vacías" y serán equivalentes la una a la otra y a $\Phi\mu$ misma. Esta noción no muy natural se incluye solamente por la completud descrita y demostrada para el desarrollo axiomático de la teoría de la cuantificación que se presenta en el Cap. 9. Hasta entonces no haremos uso de la misma.

Las letras griegas Φ y Ψ también pueden usarse en conjunción con alguna constante para denotar o proposiciones o funciones proposicionales que contengan esa constante. De esta manera "Φa" puede denotar cualquiera de las expresiones

$$Fa,\ Fa \vee Ga,\ Gc \supset Ha,\ Fw \cdot Fa,\ (\exists z)[Gz \equiv Ha], \ldots$$

y "Φb" puede denotar cualquiera de las expresiones

$$Fb,\ Fb \vee Gb,\ Gc \supset Hb,\ Fw \cdot Fb,\ (\exists z)[Gz \equiv Hb], \ldots$$

Por el convenio que hemos introducido "$\Phi \nu$" puede denotar cualquier expresión de los dos grupos precedentes según que "ν" se tome como denotando "a" o "b". Esta notación será útil al reformular nuestras reglas de cuantificación.

2. Instanciación Universal. La presentación de nuestras reglas de cuantificación vendrá acompañada con ejemplos de argumentos válidos que deben permitir, y también con ejemplos de argumentos inválidos por evitar mediante restricciones impuestas a estas reglas. Las siguientes inferencias son claramente válidas:

$$\frac{(x)Fx}{\therefore Fa},\ \frac{(y)[Fy \vee Gb]}{\therefore Fa \vee Gb},\ \frac{(z)[Fz \supset Gb]}{\therefore Fb \supset Gb},\ \frac{(x)[Fx \equiv Gy]}{\therefore Fc \equiv Gy},\ \frac{(x)\{Fx \cdot (\exists x)[Gx \cdot Hy]\}}{\therefore Fb \cdot (\exists x)[Gx \cdot Hy]}$$

Se les puede describir generalmente como siendo de la forma

$$\frac{(\mu)\Phi\mu}{\therefore \Phi\nu}$$

donde μ es una variable individual, ν es una constante individual y $\Phi\nu$ resulta de $\Phi\mu$ reemplazando todas las ocurrencias libres de μ en $\Phi\mu$ por ν. Desde luego, no puede haber ocurrencia libre de μ en $(\mu)\Phi\mu$ pero puede haber cualquier número de ocurrencias libres de μ en $\Phi\mu$. Por otro lado, no cualquier ocurrencia de μ en $\Phi\mu$ necesita ser libre: por ejemplo, en donde "μ" denote "x" y "$\Phi\mu$" denote "$Fx \supset (\exists x)[Gx \vee Hy]$" sólo la primera ocurrencia de μ en $\Phi\mu$ es libre, pues la segunda es parte del cuantificador existencial $(\exists \mu)$ y la tercera está dentro del alcance de ese cuantificador.

También son válidas inferencias como

$$\frac{(x)Fx}{\therefore Fy},\ \frac{(x)Fx}{\therefore Fx},\ \frac{(y)[Fy \vee Gb]}{\therefore Fx \vee Gb},\ \frac{(z)[Fz \supset Gx]}{\therefore Fx \supset Gx},\ \frac{(x)\{Fx \cdot (\exists x)[Gx \cdot Hy]\}}{\therefore Fz \cdot (\exists x)[Gx \cdot Hy]}, \ldots$$

que también son de la forma

$$\frac{(\mu)\Phi\mu}{\therefore \Phi\nu}$$

excepto que aquí *tanto* μ como ν son variables individuales. Aquí la premisa $(\mu)\Phi\mu$ puede ser una proposición, pero la conclusión $\Phi\nu$ debe ser una función proposicional.

Así como contamos válida la inferencia

$$\frac{(z)[Fz \vee Gb]}{\therefore Fb \vee Gb}$$

en donde la constante de instanciación "*b*" ocurre tanto en la premisa como en la conclusión, también queremos contar como válidas inferencias del tipo

$$\frac{(x)[Fx \vee Gy]}{\therefore Fy \vee Gy}, \frac{(y)[Fx \supset Gy]}{\therefore Fx \supset Gx}, \frac{(z)[Fx \supset (Gy \cdot Hz)]}{\therefore Fx \supset (Gy \cdot Hy)}, \ldots$$

en las que la *variable* de instanciación ocurre libremente tanto en las premisas como en la conclusión. En general, cuando $\Phi\nu$ se infiera de $(\mu)\Phi\mu$, válidamente, ν debe ocurrir libremente en $\Phi\nu$ en cualquier lugar en que μ ocurra libre en $\Phi\mu$, pero *puede* haber más ocurrencias libres de ν en $\Phi\nu$ que ocurrencias libres de μ en $\Phi\mu$. Habrá más siempre que ν ocurra libre en $\Phi\mu$.

Todas las inferencias precedentes se pueden hacer legítimas por nuestro principio de Instanciación Universal. Será conveniente establecer para el capítulo presente dos convenios definidos que gobiernen las expresiones "$\Phi\mu$" y "$\Phi\nu$", de modo que cada una pueda usarse en el mismo sentido en los enunciados de las 4 reglas de cuantificación. El primer convenio es que *mu* ("μ") denote exclusivamente variables individuales, mientras que *nu* ("ν") pueda denotar, ya una variable individual ya una constante individual. El segundo convenio es el siguiente:

La expresión "$\Phi\mu$" denota cualquier función proposicional o proposición. La expresión "$\Phi\nu$" denota el resultado de reemplazar toda ocurrencia libre de μ en $\Phi\mu$ por ν, a condición de que si ν es una variable debe ocurrir libre en $\Phi\nu$ en todos los sitios en que μ ocurra libre en $\Phi\mu$. (Si $\Phi\mu$ no contiene ocurrencia libre de μ entonces $\Phi\nu$ y $\Phi\mu$ son idénticas. ν y μ pueden, desde luego, ser la misma variable: si lo son, también son idénticas $\Phi\nu$ y $\Phi\mu$.)

Este convenio general ayuda a prevenir inferencias indeseadas (esto es, inválidas), que podrían permitir nuestras cuatro reglas de cuantificación. De qué manera contribuye el convenio a alcanzar este fin se explicará siguiendo las formulaciones de cada una de las cuatro reglas.

Nuestra primera Regla de Cuantificación, la Instanciación Universal, se enuncia como

$$\text{UI: } \frac{(\mu)\Phi\mu}{\therefore \Phi\nu}$$

La convención general que gobierna $\Phi\mu$ y $\Phi\nu$ sirve para prevenir inferencias erróneas como

$$\frac{(x)[(\exists y)(Fx \equiv \sim Fy)]}{\therefore (\exists y)(Fy \equiv \sim Fy)}$$

que podría permitir el principio **UI** porque ν ("y") no ocurre libre en $\Phi\nu$("$(\exists y)(Fy \equiv \sim Fy)$") en todos los lugares en que μ ("x") ocurre libre en $\Phi\mu$("$(\exists y)(Fx \equiv \sim Fy)$"). Luego "$(\exists y)(Fy \equiv \sim Fy)$" no es una $\Phi\nu$ legítima para usarse en la aplicación de **UI** donde $(\mu)\Phi\mu$ es "$(x)[(\exists y)(Fx \equiv \sim Fy)]$". Debiera ser obvio que la inferencia es inválida: falla para un universo que contenga cosas que son F y algunas otras que no son F, porque esto hará verdadera la premisa, mientras que la conclusión sería falsa para todo universo posible, desde el momento que es autocontradictoria.

3. Generalización Existencial. Pasando ahora a la Generalización Existencial observamos que todas las siguientes son inferencias válidas:

$$\frac{Fa}{\therefore (\exists x)Fx}, \frac{Fa}{\therefore (\exists y)Fy}, \frac{Fa \vee Gb}{\therefore (\exists x)(Fx \vee Gb)}, \frac{Fa \supset Gb}{\therefore (\exists y)(Fa \supset Gy)}, \ldots$$

Se les puede describir generalmente como siendo de la forma

$$\frac{\Phi\nu}{\therefore (\exists\mu)\Phi\mu}$$

Aquí, tanto premisas como conclusiones son proposiciones. También son válidas las inferencias que contengan funciones proposicionales y sean como

$$\frac{Fx}{\therefore (\exists y)Fy}, \frac{Fa \vee Gy}{\therefore (\exists x)(Fa \vee Gx)}, \frac{Fx \supset Gy}{\therefore (\exists y)(Fx \supset Gy)}, \frac{Fx \cdot Gx}{\therefore (\exists y)(Fy \cdot Gx)}, \ldots$$

que son del mismo esquema que el precedente, excepto en que ν es una variable en lugar de una constante.

Nuestra segunda Regla de Cuantificación, la Generalización Existencial se enuncia como

$$\textbf{EG: } \frac{\Phi\nu}{\therefore (\exists\mu)\Phi\mu}$$

El convenio general que rige $\Phi\mu$ y $\Phi\nu$ sirve para evitar una inferencia errónea como

$$\frac{Fx \equiv \sim Fy}{\therefore (\exists x)(Fx \equiv \sim Fx)}$$

que sería permitida por **EG** porque ν ("y") no ocurre libre en $\Phi\nu$ ("$Fx \equiv \sim Fy$") en todos lugares en que μ ("x") ocurre libre en $\Phi\mu$ ("$Fx \equiv \sim Fx$"). Por lo tanto "$Fx \equiv \sim Fy$" no es una $\Phi\nu$ legítima de la cual "$(\exists x)(Fx \equiv \sim Fx)$" pueda obtenerse como $(\exists \mu)\Phi\mu$ por **EG**. Debiera ser obvio inferencia es inválida: pues aunque la conclusión es falsa por ser una contradicción en sí, la premisa tiene instancias de sustitución que son verdaderas.

Teniendo a nuestra disposición tanto **UI** como **EG** podemos ilustrar su uso al demostrar la validez del argumento

> Todos los hombres son mortales.
> ___
> Por lo tanto, si Sócrates es un hombre, entonces algunos hombres son mortales.

por medio de la siguiente demostración condicional:

1.	$(x)(Hx \supset Mx)$	$/\therefore Hs \supset (\exists x)(Hx \cdot Mx)$
→ 2.	Hs	
3.	$Hs \supset Ms$	1, **UI**
4.	Ms	3, 2, M.P.
5.	$Hs \cdot Ms$	2, 4, Conj.
6.	$(\exists x)(Hx \cdot Mx)$	5, **EG**
7.	$Hs \supset (\exists x)(Hx \cdot Mx)$	2–6, C.P.

Un esquema simple de deducción es suficiente para establecer la validez de cualquier argumento de la forma

$$\frac{(\mu)\Phi\mu}{\therefore (\exists\mu)\Phi\mu}$$

Aquí, el esquema de demostración es

1.	$(\mu)\Phi\mu$	$/\therefore (\exists\mu)\Phi\mu$
2.	$\Phi\nu$	1, **UI**
3.	$(\exists\mu)\Phi\mu$	2, **EG**

4. Instanciación Existencial. Antes de discutir nuestra nueva formulación de la Instanciación Existencial será útil establecer la verdad lógica de equivalencias de la forma

$$\text{(E)} \qquad (\nu)[\Phi\nu \supset p] \equiv [(\exists\mu)\Phi\mu \supset p]$$

donde ν ocurre libre en $\Phi\nu$ en todos *y sólo* en aquellos lugares en que μ ocurre libremente en $\Phi\mu$ y donde p no contiene ocurrencias libres de la variable ν. En el caso de que p sea verdadera los dos lados de la equivalencia deben ser verdaderos: porque si p es verdadera, entonces $\Phi\nu \supset p$ es verdadera para cada valor de

ν, luego $(\nu)[\Phi\nu \supset p]$ es verdadera. Y la verdad de $(\exists\mu)\Phi\mu \supset p$ también se sigue inmediatamente de la verdad de p. En el caso en que p sea falsa y $(\nu)[\Phi\nu \supset p]$ verdadera toda instancia de sustitución de $\Phi\nu \supset p$ es verdadera y, por tanto, toda instancia de sustitución de $\Phi\nu$ debe ser falsa, luego $(\exists\mu)\Phi\mu$ debe ser falsa y, por tanto, $(\exists\mu)\Phi\mu \supset p$ verdadera. En caso de que p sea falsa y $(\exists\mu)\Phi\mu \supset p$ verdadera, $(\exists\mu)\Phi\mu$ debe ser falsa y así, toda instancia de sustitución de $\Phi\nu$ debe ser falsa, por lo que cada instancia de sustitución de $\Phi\nu \supset p$ debe ser verdadera y, por tanto, $(\nu)[\Phi\nu \supset p]$ también es verdadera. Este argumento establece la verdad de cada equivalencia de la forma (E), pues si p es verdadera ambos lados son verdaderos y si p es falsa cada lado implica el otro.

Pasando ahora a la Instanciación Existencial queremos permitir el paso de $(\exists x)Fx$ a Fx o Fy únicamente bajo condiciones muy estrictas. No sólo debe la variable de instanciación no tener ocurrencia libre previa (como se discutió en el número 4 del párrafo 4.2) sino que no debemos permitir que $(x)Fx$ se infiera de $(\exists x)Fx$ por la Instanciación Existencial y la Generalización Universal. Hay muchas maneras de imponer tales restricciones. Una de ellas es formular la regla de Instanciación Existencial de modo que la fórmula o renglón *finalmente* inferidos por medio de ella no contenga variables libres introducidas por la misma. Lo factible de este procedimiento puede verse a través de las consideraciones siguientes.

Aquí, como en secciones previas, nos concierne la construcción de demostraciones de validez sólo para argumentos cuyas premisas y conclusiones sean proposiciones, no funciones proposicionales conteniendo variables libres. Luego, nunca terminamos una demostración con una función proposicional conteniendo una variable libre. De este modo, cualquier demostración de validez en la que la regla de la Instanciación Existencial involucre el paso de $(\exists\mu)\Phi\mu$ a $\Phi\nu$, la función proposicional $\Phi\nu$ sólo sirve para permitir la inferencia subsecuente de una fórmula sin ocurrencia libre de la variable ν.

Supongamos que ya tenemos $(\exists\mu)\Phi\mu$ como renglón en una demostración y sabemos que en presencia de otros renglones ya obtenidos, si tuviésemos también $\Phi\nu$ podríamos deducir una fórmula deseada p que no contiene ocurrencia libre de la variable ν. Podemos proceder escribiendo $\Phi\nu$ como un supuesto de alcance limitado. Entonces, después de haber reducido p, podemos cerrar el alcance del supuesto e inferir la fórmula $\Phi\nu \supset p$ por la regla de Demostración Condicional reforzada. De este renglón (con restricciones razonables) la fórmula $(\nu)[\Phi\nu \supset p]$ puede inferirse por Generalización Universal. Y de la última fórmula, por la equivalencia (E), podemos inferir $(\exists\mu)\Phi\mu \supset p$. Ahora, de esta fórmula y el renglón anterior $(\exists\mu)\Phi\mu$

podemos obtener p por *Modus Ponens*. Todo este proceso lo podemos representar esquemáticamente de la manera que sigue

i.	$(\exists\mu)\Phi\mu$	
j.	$\Phi\nu$	
	.	
	.	
	.	
k.	p	
k+1.	$\Phi\nu \supset p$	j−k, C.P.
k+2.	$(\nu)[\Phi\nu \supset p]$	k+1, **UG**
k+3.	$(\exists\mu)\Phi\mu \supset p$	k+2, equivalencia (E)
k+4.	p	k+3, i, M.P.

La discusión precedente puede verse como proporcionando una justificación informal para la regla de Instanciación Existencial que ahora se puede enunciar como

EI:

$$
\begin{array}{l}
(\exists\mu)\Phi\mu \\
\Phi\nu \\
\quad . \\
\quad . \\
\quad . \\
p \\
\hline
\therefore p
\end{array}
$$

con la condición de que ν sea una variable sin ocurrencias libres ni en p ni en cualquier renglón anterior a $\Phi\nu$.

Antes de discutir las restricciones que se han de imponer al enunciado de **EI** puede ser útil presentar una demostración de validez que hace uso de la nueva regla:

1.	$(x)(Fx \supset Gx)$	
2.	$(\exists y)Fy$	$/ \therefore (\exists z)Gz$
3.	Fu	
4.	$Fu \supset Gu$	1, **UI**
5.	Gu	4, 3, M.P.
6.	$(\exists z)Gz$	5, **EG**
7.	$(\exists z)Gz$	2, 3–6, **EI**

Puede, aunque no es necesario, haber otros renglones interviniendo entre la premisa $(\exists\mu)\Phi\mu$ (renglón 2 anterior) y la función proposicional $\Phi\nu$ (renglón 3 anterior) marcada como supuesto de alcance limitado. Cuando la fórmula deseada p (renglón 6 anterior) ha sido alcanzada, el siguiente renglón, de nuevo, es p simplemente, y la justificación escrita a su lado es el número del renglón que consiste en $(\exists\mu)\Phi\mu$ y unidas por un guión el número del renglón que consiste en $\Phi\nu$ y el primer renglón que consiste en p, y la notación **EI**.

El convenio general que rige $\Phi\mu$ y $\Phi\nu$ sirve para evitar que una "demostración" errónea como

1.	$(\exists x)(Fx \cdot Gx)$	$/ \therefore (x)Fx$
2.	$Fx \cdot Gy$	(incorrecto como parte de **EI**)
3.	Fx	2, Simp.
4.	Fx	1, 2–3, **EI** (incorrecto)
5.	$(x)Fx$	4, **UG**

sea permitida por **EI**, porque ν ("y") no ocurre libre en $\Phi\nu$ ("$Fx \cdot Gy$") en todos los lugares en que μ ("x") ocurre libre en $\Phi\mu$ ("$Fx \cdot Gx$"); por lo tanto, "$Fx \cdot Gy$" no es un $\Phi\nu$ legítimo para usarse en la aplicación de **EI** donde $(\exists\mu)\Phi\mu$ es "$(\exists x)(Fx \cdot Gx)$". Debiera ser obvio que el argumento es inválido: el que una cosa sea un F y un G claramente no trae consigo que cada cosa sea un F.

La restricción que ν no ocurra libre en cualquier renglón anterior a $\Phi\nu$ asegura que ν no ocurre libre en $(\exists\mu)\Phi\mu$ y, por lo tanto, si ν es diferente de μ, ν no ocurre libre en $\Phi\mu$ tampoco. El convenio general nos asegura ya que no hay ocurrencia libre de μ en $\Phi\nu$. De modo que la restricción presente hecha sobre **EI** junto con el convenio general implica la restricción asociada con la equivalencia lógica (E), que ν ocurre libre en $\Phi\nu$ en todos los lugares *y solamente* en los lugares en que μ ocurre libre en $\Phi\mu$.

La restricción que ν no ocurra libre en p sirve para evitar todo uso (erróneo) subsecuente de la Generalización Universal para deducir $(\mu)\Phi\mu$ como conclusión de $(\exists\mu)\Phi\mu$ como premisa que por otro lado sería posible: porque si p se permitiese que contuviera una ocurrencia libre de ν podría ser $\Phi\nu$ misma, de lo que **UG** podría usarse para deducir la conclusión $(\mu)\Phi\mu$.

La restricción que ν no ocurra libre en ningún renglón anterior a $\Phi\nu$ sirve para prevenir que **EI** dé lugar a una "demostración" errónea como

1.	$(x)(\exists y)(Fx \equiv \sim Fy)$	$/ \therefore (\exists x)(Fx \equiv \sim Fx)$
2.	$(\exists y)(Fx \equiv \sim Fy)$	1, **UI**
3.	$Fx \equiv \sim Fx$	(incorrecto como parte de **EI**)
4.	$(\exists x)(Fx \equiv \sim Fx)$	3, **EG**
5.	$(\exists x)(Fx \equiv \sim Fx)$	2, 3–4, **EI** (incorrecto)

porque ν ("x") ocurre libre en el renglón 2 que precede a $\Phi\nu$ ("$Fx \equiv \sim Fx$") en el renglón 3. Luego, "$Fx \equiv \sim Fx$" no es una $\Phi\nu$ legítima para usarse en la aplicación de **EI** donde $(\exists\mu)\Phi\mu$ es "$(\exists y)(Fx \equiv \sim Fy)$". Es obvio que el argumento es inválido: falla para un modelo que contenga cosas que son F y otras cosas que no son F, lo que haría verdadera la premisa mientras que la conclusión es falsa en todo modelo porque es una autocontradicción.

5. Generalización Universal. La formulación complicada y altamente restringida de **EI** que acabamos de dar permite una formulación un tanto menos restringida de la regla de Generalización Universal que ahora enunciamos como

$$\text{UG: } \frac{\Phi\nu}{\therefore (\mu)\Phi\mu}$$

bajo la condición que ν sea una variable que no ocurre libre en ($\Phi\mu$) $\Phi\mu$ o en cualquier supuesto dentro de cuyo alcance esté $\Phi\nu$.

El convenio general que rige $\Phi\mu$ y $\Phi\nu$ sirve para prevenir que **UG** permita una "demostración" errónea como

1.	$(\exists x)(y)(Fx \supset \sim Fy)$	$/ \therefore (x)(Fx \supset \sim Fx)$
→ 2.	$(y)(Fx \supset \sim Fy)$	
3.	$Fx \supset \sim Fy$	2, **UI**
4.	$(x)(Fx \supset \sim Fx)$	3, **UG** (incorrecto)
5.	$(x)(Fx \supset \sim Fx)$	1, 2–4, **EI**

porque ν ("y") no ocurre libre en $\Phi\nu$ ("$Fx \supset \sim Fy$") en todos los lugares en que μ ("x") ocurre libre en $\Phi\mu$ ("$Fx \supset \sim Fx$"). Por lo tanto, "$Fx \supset \sim Fy$" no es una $\Phi\nu$ legítima de la cual pueda obtenerse "$(x)(Fx \supset \sim Fx)$" como $(\mu)\Phi\mu$ por **UG**. Debe ser obvio que el argumento es inválido porque su premisa es verdadera si existe al menos una cosa que no es un F mientras que su conclusión asevera que no hay F en absoluto.

La restricción que ν no ocurre libre en $(\mu)\Phi\mu$ sirve para prevenir que **UG** dé lugar a una "demostración" errónea como

1.	$(x)(Fx \equiv Fx)$	$/ \therefore (x)(y)(Fx \equiv Fy)$
2.	$Fx \equiv Fx$	1, **UI**
3.	$(y)(Fx \equiv Fy)$	2, **UG** (incorrecto)
4.	$(x)(y)(Fx \equiv Fy)$	3, **UG**

porque ν ("x") ocurre libre en $(\mu)\Phi\mu$("$(y)(Fx \equiv Fy)$"). Luego "$Fx \equiv Fx$" no es una $\Phi\nu$ legítima de lo cual pueda deducirse "$(y)(Fx \equiv Fy)$"

como $(\mu)\Phi\mu$ por **UG**. Debe parecer obvia la invalidez del argumento porque su premisa afirma solamente que una cosa es una F si y sólo si es un F mientras que su conclusión afirma que de cualesquier cosas x y y, x es un F si y sólo si y es un F también.

La restricción que ν no ocurra libre en cualquier supuesto dentro de cuyo alcance se encuentre $\Phi\nu$ sirve para prevenir que **UG** permita una "demostración" errónea como

1. $(\exists x)Fx$ $/\therefore (x)Fx$
2. Fy
3. $(x)Fx$ 2, **UG** (incorrecto)
4. $(x)Fx$ 1, 2–3, **EI**

porque ν ("y") ocurre libre en el supuesto "Fy" dentro de cuyo alcance se encuentra la premisa $\Phi\nu$ ("Fy"). Luego, en este caso "Fy" no es una $\Phi\nu$ legítima de la cual pueda deducirse "$(x)Fx$" como $(\mu)\Phi\mu$ por **UG**. El argumento desde luego, es obviamente inválido.

EJERCICIOS

Identificar y explicar todos los errores de las siguientes "demostraciones" erróneas:

1.
1. Fx
2. $(y)Fy$ 1, **UG**
3. $Fx \supset (y)Fy$ 1–2, C.P.
4. $(x)[Fx \supset (y)Fy]$ 3, **UG**

2.
1. $(\exists x)(Fx \cdot Gx)$ $/\therefore (\exists x)Fx$
2. $Fx \cdot Gx$
3. Fx 2, Simp.
4. Fx 1, 2–3, **EI**
5. $(\exists x)Fx$ 4, **EG**

***3.**
1. $(x)(\exists y)(Fx \equiv Gy)$ $/\therefore (\exists y)(x)(Fx \equiv Gy)$
2. $(\exists y)(Fx \equiv Gy)$ 1, **UI**
3. $Fx \equiv Gy$
4. $(x)(Fx \equiv Gy)$ 3, **UG**
5. $(\exists y)(x)(Fx \equiv Gy)$ 4, **EG**
6. $(\exists y)(x)(Fx \equiv Gy)$ 2, 3–5, **EI**

4.
1. $(x)(\exists y)(Fx \supset Gy)$ $/\therefore (\exists y)(x)(Fx \supset Gy)$
2. $(\exists y)(Fx \supset Gy)$ 1, **UI**
3. $Fx \supset Gx$
4. $(x)(Fx \supset Gx)$ 3, **UG**
5. $(\exists y)(x)(Fx \supset Gy)$ 4, **EG**
6. $(\exists y)(x)(Fx \supset Gy)$ 2, 3–5, **EI**

5.

1.	$(y)(\exists x)(Fx \vee Gy)$	$/\therefore (\exists x)(y)(Fx \vee Gy)$
2.	$(\exists x)(Fx \vee Gy)$	1, **UI**
3.	$Fx \vee Gx$	
4.	$(y)(Fx \vee Gy)$	3, **UG**
5.	$(\exists x)(y)(Fx \vee Gy)$	4, **EG**
6.	$(\exists x)(y)(Fx \vee Gy)$	2, 3–5, **EI**

***6.**

1.	$(\exists x)(y)[(Fx \cdot Gx) \supset Hy]$	$/\therefore (\exists x)[(Fx \cdot Gx) \supset Hx]$
2.	$(y)[(Fz \cdot Gz) \supset Hy]$	
3.	$(Fz \cdot Gz) \supset Hy$	2, **UI**
4.	$(\exists x)[(Fx \cdot Gz) \supset Hy]$	3, **EG**
5.	$(y)(\exists x)[(Fx \cdot Gy) \supset Hy]$	4, **UG**
6.	$(y)(\exists x)[(Fx \cdot Gy) \supset Hy]$	1, 2–5, **EI**
7.	$(\exists x)[(Fx \cdot Gx) \supset Hx]$	6, **UI**

7.

1.	$(\exists x)Fx$	
2.	$(\exists x)Gx$	$/\therefore (\exists x)(Fx \cdot Gx)$
3.	Fy	
4.	Gy	
5.	$Fy \cdot Gy$	3, 4. Conj.
6.	$(\exists x)(Fx \cdot Gx)$	5, **EG**
7.	$(\exists x)(Fx \cdot Gx)$	2, 4–6, **EI**
8.	$(\exists x)(Fx \cdot Gx)$	1, 3–7, **EI**

8.

1.	$(\exists x)(\exists y)[(Fx \vee Gy) \cdot Hy]$	$/\therefore (x)(y)(Fy \vee Gx)$
2.	$(\exists y)[(Fx \vee Gy) \cdot Hy]$	
3.	$(Fx \vee Gx) \cdot Hx$	
4.	$Fx \vee Gx$	3, Simp.
5.	$Fx \vee Gx$	2, 3–4, **EI**
6.	$Fx \vee Gx$	1, 2–5, **EI**
7.	$(y)(Fy \vee Gx)$	6, **UG**
8.	$(x)(y)(Fy \vee Gx)$	7, **UG**

***9.**

1.	$(\exists x)(Fx \cdot Gx)$	
2.	$(\exists x)(\sim Fx \cdot Gx)$	$/\therefore (\exists x)(Fx \cdot \sim Fx)$
3.	$Fx \cdot Gy$	
4.	Fx	3, Simp.
5.	Fx	1, 3–4, **EI**
6.	$\sim Fx \cdot Gx$	
7.	$\sim Fx$	6, Simp.
8.	$\sim Fx$	2, 6–7, **EI**
9.	$Fx \cdot \sim Fx$	5, 8, Conj.
10.	$(\exists x)(Fx \cdot \sim Fx)$	9, **EG**

10.	1. $(x)[(Fx \supset Gx) \cdot \sim Ga]$	$/ \therefore (x) \sim Fx$
	→2. $(x)[(Fx \supset Gx) \cdot \sim Gy]$	
	3. $(Fz \supset Gz) \cdot \sim Gy$	2, UI
	4. $(y)[(Fy \supset Gy) \cdot \sim Gy]$	3, UG
	5. $(Fu \supset Gu) \cdot \sim Gu$	4, UI
	6. $Fu \supset Gu$	5, Simp.
	7. $\sim Gu \cdot (Fu \supset Gu)$	5, Conm.
	8. $\sim Gu$	7, Simp.
	9. $\sim Fu$	6, 8, M.T.
	10. $(x) \sim Fx$	9, UG
	11. $(x)[(Fx \supset Gx) \cdot \sim Gy] \supset (x) \sim Fx$	2–10, C.P.
	12. $(w)\{(x)[(Fx \supset Gx) \cdot \sim Gw] \supset (x) \sim Fx\}$	11, UG
	13. $(x)[(Fx \supset Gx) \cdot \sim Ga] \supset (x) \sim Fx$	12, UI
	14. $(x) \sim Fx$	13, 1, M.P.

6. Demostraciones de Validez Abreviadas. En esta etapa de nuestro trabajo es deseable abreviar la longitud de nuestras demostraciones formales de validez permitiendo cortar camino en la aplicación de la lista original de Reglas de Inferencia. Podemos combinar cualquier aplicación del principio de Doble Negación con cualquier otro paso, lo que nos va a permitir pasar directamente de "$\sim A \supset B$" a "$A \vee B$", o viceversa sin tener que escribir el paso intermedio "$\sim\sim A \vee B$". Podemos acortar tediosas aplicaciones del principio de Conmutación permitiendo no sólo "$A \mathrel{.\dot{}.} A \vee B$" por el principio de Adición sino inferencias tales como "$A \therefore B \vee A$". También permitimos inferencias tales como "$A \vee B, \sim B \therefore A$" por el principio del Silogismo Disyuntivo así como "$A \vee B, \sim A \therefore B$". Dado que la definición de la Implicación Material y el principio de Distribución pueden siempre usarse para obtener "$A \supset (B \cdot C)$" a partir de "$(A \supset B) \cdot (A \supset C)$" y viceversa, nuestras demostraciones pueden abreviarse permitiendo aplicar la Distribución a condicionales cuyos consecuentes sean conjunciones. Esto equivale a agregar la forma "$[p \supset (q \cdot r)] \equiv [(p \supset q) \cdot (p \supset r)]$" a nuestra lista como una versión alternativa del principio de Distribución. Aplicando repetidamente los principios de Asociación y Conmutación podemos redisponer los términos de cualquier conjunción o disyunción como deseemos. Así, podemos acortar nuestras demostraciones omitiendo paréntesis, corchetes, etc., de las conjunciones de 3 cualesquiera o más proposiciones. Así, proposiciones tales como "$A \cdot \{B \cdot [C \cdot (D \cdot E)]\}$", "$[(A \cdot B) \cdot [C \cdot (D \cdot E)]$", "$(A \cdot B) \cdot [(C \cdot D) \cdot E]$", "$[(A \cdot B) \cdot C] \cdot (D \cdot E)$", "$[A \cdot (B \cdot C)] \cdot (D \cdot E)$", "$\{[(A \cdot B) \cdot C] \cdot D\} \cdot E$", "$A \cdot [(B \cdot C) \cdot (D \cdot E)]$", ... todas se escribirán indiferentemente como "$A \cdot B \cdot C \cdot D \cdot E$", y *cualquier* permutación se justificará simplemente por el principio de Conmutación. Aún más, si se desea inferir la conclusión de *algunos* de los conjuntos indicados, en cualquier orden, puede hacerse esto en un solo paso y puede justificarse por el principio de Simplificación. Así, de "$A \cdot B \cdot C \cdot D \cdot E$" podemos inferir "$E \cdot B \cdot D$" en un solo paso. También el principio de Conjunción puede aplicarse a cualquier número de renglones para dar lugar a un nuevo renglón que es la Conjunción de todos ellos. Finalmente, se permitirá la reducción telescópica de las reglas de Implicación Material, de De Morgan, y Doble Negación para obtener "$\sim(A \supset B)$" a partir de "$A \cdot \sim B$" y viceversa, lo que viene a ser, agregar la forma "$\sim(p \supset q) \equiv (p \cdot \sim q)$" a nuestra lista como una versión alternativa de la Implicación Material.

Al demostrar la validez de algunos argumentos deben usarse las cuatro reglas de cuantificación. Consideremos el argumento siguiente moderadamente complejo:

> **Si todas las medicinas están contaminadas, entonces todos los técnicos negligentes son unos bribones. Si hay medicinas contaminadas, entonces todas las medicinas están contaminadas y son peligrosas. Todos los germicidas son drogas. Sólo los negligentes son distraídos. Por lo tanto, si cualquier técnico es distraído y si algunos germicidas están contaminados, entonces él es un bribón.**

Utilizando abreviaciones más o menos obvias se puede simbolizar y demostrar como válido de la manera siguiente:

1.	$(x)[Dx \supset Cx] \supset (y)[(Ny \cdot Ty) \supset Sy]$	
2.	$(\exists x)[Dx \cdot Cx] \supset (y)[Dy \supset (Cy \cdot Uy)]$	
3.	$(x)[Gx \supset Dx]$	
4.	$(x)[Ax \supset Nx]$ $\quad / \therefore (x)\{(Tx \cdot Ax) \supset \{(\exists y)[Gy \cdot Cy] \supset Sx\}\}$	
5.	$Tu \cdot Au$	
6.	$(\exists y)[Gy \cdot Cy]$	
7.	$Gw \cdot Cw$	
8.	$Gw \supset Dw$	3, UI
9.	Gw	7, Simp.
10.	Dw	8, 9, M.P.
11.	Cw	7, Simp.
12.	$Dw \cdot Cw$	10, 11, Conj.
13.	$(\exists x)[Dx \cdot Cx]$	12, EG
14.	$(y)[Dy \supset (Cy \cdot Uy)]$	2, 13, M.P.
15.	$Dz \supset (Cz \cdot Uz)$	14, UI
16.	$(Dz \supset Cz) \cdot (Dz \supset Uz)$	15, Dist.
17.	$Dz \supset Cz$	16, Simp.
18.	$(x)[Dx \supset Cx]$	17, UG
19.	$(y)[(Ny \cdot Ty) \supset Sy]$	1, 18, M.P.
20.	$(Nu \cdot Tu) \supset Su$	19, UI
21.	Au	5, Simp.
22.	$Au \supset Nu$	4, UI
23.	Nu	22, 21, M.P.
24.	Tu	5, Simp.
25.	$Nu \cdot Tu$	23, 24, Conj.
26.	Su	20, 25, M.P.
27.	Su	6, 7–26, EI
28.	$(\exists y)[Gy \cdot Cy] \supset Su$	6–27, C.P.
29.	$(Tu \cdot Au) \supset \{(\exists y)[Gy \cdot Cy] \supset Su\}$	5–28, C.P.
30.	$(x)\{(Tx \cdot Ax) \supset \{(\exists y)[Gy \cdot Cy] \supset Sx\}\}$	29, UG

EJERCICIOS

I. Construir una demostración formal de validez para cada argumento:

*1. $(x)(Ax \supset Bx)$
$\therefore (x)(Bx \supset Cx) \supset (Ak \supset Ck)$

2. $(x)(Dx \supset Ex)$
$\therefore Da \supset [(y)(Ey \supset Fy) \supset Fa]$

3. $(x)[Gx \supset (y)(Hy \supset Iy)]$
$\therefore (x)Gx \supset (y)(Hy \supset Iy)$

4. $(\exists x)Jx \supset (\exists y)Ky$
$\therefore (\exists x)[Jx \supset (\exists y)Ky]$

*5. $(\exists x)Lx \supset (y)My$
$\therefore (x)[Lx \supset (y)My]$

6. $(x)(Nx \supset Ox)$
$\therefore (x)\{Px \supset [(y)(Py \supset Ny) \supset Ox]\}$

7. $(x)(Qx \supset Rx)$
$(x)(Sx \supset Tx)$
$\therefore (x)(Rx \supset Sx) \supset (y)(Qy \supset Ty)$

8. $(\exists x)Ux \supset (y)[(Uy \vee Vy) \supset Wy]$
$(\exists x)Ux \cdot (\exists x)Wx$
$\therefore (\exists x)(Ux \cdot Wx)$

9. $(\exists x)Xx \supset (y)(Yy \supset Zy)$
$\therefore (\exists x)(Xx \cdot Yx) \supset (\exists y)(Xy \cdot Zy)$

*10. $(\exists x)Ax \supset (y)(By \supset Cy)$
$(\exists x)Dx \supset (\exists y)By$
$\therefore (\exists x)(Ax \cdot Dx) \supset (\exists y)Cy$

11. $(x)(\exists y)(Ex \vee Fy)$
$\therefore (x)Ex \vee (\exists y)Fy$

12. $(\exists x)Gx \vee (y)(Gy \supset Hy)$
$(x)(Ix \supset \sim Gx)$
$\therefore (x)(Gx \supset Ix) \supset (y)(Gy \supset Hy)$

13. $(\exists x)Jx \vee (\exists y)Ky$
$(x)(Jx \supset Kx)$
$\therefore (\exists y)Ky$

14. $(x)(Lx \supset Mx)$
$(x)(Mx \supset Nx)$
$\therefore (\exists x)Lx \supset (\exists y)Ny$

*15. $(x)\{Ox \supset [(y)(Py \supset Qy) \supset Rx]\}$
$(x)\{Rx \supset [(y)(Py \supset Sy) \supset Tx]\}$
$\therefore (y)[Py \supset (Qy \cdot Sy)] \supset (x)(Ox \supset Tx)$

16. $(\exists x)[Ux \cdot (y)(Vy \supset Wy)]$
$(x)\{Ux \supset [(\exists y)(Xy \cdot Wy) \supset Yx]\}$
$\therefore (\exists y)(Xy \cdot Vy) \supset (\exists x)Yx$

17. $(x)\{Ax \supset [(\exists y)By \supset Cx]\}$
$(x)\{Cx \supset [(\exists y)Dy \supset Ex]\}$
$\therefore (\exists x)(Bx \cdot Fx) \supset [(y)(Fy \supset Dy) \supset (z)(Az \supset Ez)]$

18. $(x)(\exists y)(Gx \cdot Hy)$
$\therefore (x)Gx \cdot (\exists y)Hy$

19. $(\exists x)(y)(Ix \equiv Jy)$
$\therefore (y)(\exists x)(Ix \equiv Jy)$

20. $(x)(\exists y)(Kx \cdot Ly)$
$\therefore (\exists y)(x)(Kx \cdot Ly)$

II. Al construir una demostración formal de validez para cada uno de los argumentos que siguen, usar en cada caso la notación sugerida procurando que las fórmulas simbólicas sean tan paralelas al castellano como se pueda:

1. **Ningún acróbata es torpe. Por lo tanto, si Alberto es un mesero y si todos los meseros son torpes Alberto no es un acróbata. (*Ax, Tx, Mx, a.*)**
2. **Todos los perros falderos son mansos. Por lo tanto, si algunos perros son excitables y ningún perro excitable es manso, entonces no son perros falderos. (*Fx, Mx, Px, Ex.*)**
3. **Todos los acusados son culpables. Todos los convictos serán colgados. Por lo tanto, si todos los que son culpables son convictos, entonces todos los acusados serán colgados. (*Ax, Gx, Cx, Hx.*)**

*4. Si hay genios entonces todos los grandes compositores son genios. Si alguien es temperamental, todos los genios son temperamentales. Por lo tanto, si alguien es un genio temperamental, entonces todos los grandes compositores son temperamentales. (Gx: x es un genio. Cx: x es un gran compositor. Px: x es una persona. Tx: x es temperamental.)

5. Cualquier automóvil que tenga buenos frenos es seguro para el conductor y seguro para los pasajeros. Por lo tanto, si un automóvil es nuevo, entonces, si todos los automóviles nuevos tienen buenos frenos, es seguro para el conductor. (Ax; x es un automóvil. Fx; x tiene buenos frenos. Cx: x es seguro para el conductor. Px: x es seguro para los pasajeros. Nx: x es nuevo.)

6. O todos los invitados se divirtieron o algunos invitados disimularon sus sentimientos. Ninguna persona honesta debiera disimular sus sentimientos. Por lo tanto, si todos los invitados son personas honestas entonces todos los invitados se divirtieron. (Ix: x es un invitado. Dx: x se divirtió. Dx: x disimula sus sentimientos. Hx: x es honesto. Px: x es una persona.)

7. Cualquier hombre de negocios que sea un poeta debe ser rico. Todos los hombres ricos son conservadores. Si algún conservador no ama la poesía entonces ningún poeta es conservador. Por lo tanto, si hay un hombre rico que no ama la poesía entonces ningún hombre de negocios es poeta. (Nx: x es un hombre de negocios. Px: x es un poeta. Rx: x es un hombre rico. Cx: x es un conservador. Ax: x ama la poesía.)

*8. Todas las sustancias radiactivas o son de corta vida o tienen valor médico. Ningún isótopo del uranio que sea radiactivo tiene una vida corta. Por lo tanto, si todos los isótopos del uranio son radiactivos, entonces todos los isótopos del uranio tienen valor médico. (Rx: x es radiactivo. Sx: x tiene una vida corta. Mx: x tiene valor médico. Ux: x es un isótopo del uranio.)

9. Ningún testigo cuerdo mentiría si su mentira lo implicase en un crimen. Por lo tanto, si cualquier testigo se implicara en un crimen, entonces, si todos los testigos fuesen cuerdos, ese testigo no mintió. (Cx: x está cuerdo. Tx: x es un testigo. Mx: x miente. Ix: x se implica en un crimen.)

10. Si falta alguna joya, entonces, si todos los sirvientes son honestos será devuelta. Si cualquier sirviente es honesto todos lo son. De modo que si falta alguna joya, entonces si al menos un sirviente es honesto, será devuelta. (Jx: x es una joya. Fx: x falta. Sx: x es un sirviente. Hx: x es honesto. Dx: x será devuelta.)

11. Si hay liberales todos los filósofos son liberales. Si hay humanistas, entonces todos los liberales son humanistas. Por lo tanto, si hay humanistas que sean liberales, entonces todos los filósofos son humanistas. (Lx: x es un liberal. Fx: x es un filósofo. Hx: x es un humanista.)

*12. Si algo se pierde entonces si cada cual aprecia sus pertenencias se sabrá que se ha perdido. Si alguien aprecia sus pertenencias, entonces todos las aprecian. Por lo tanto, si algo se pierde, entonces, si alguien aprecia sus pertenencias entonces algo se habrá perdido. (Hx: x se ha perdido. Px: x es una persona. Ax: x aprecia sus pertenencias. Mx: x se sabrá que se ha perdido.)

4.6. Verdades Lógicas que Involucran Cuantificadores

En el Cap. 2 las tablas de verdad se usaron no solamente para establecer la *validez* de los argumentos sino también para certificar la *verdad lógica* de los proposiciones (tautologías tales como "$A \vee \sim A$") la noción de una proposición lógicamente verdadera es, por lo tanto, familiar. Como hemos visto, no cualquier argumento válido puede establecerse por el método de las tablas de verdad: algunos de ellos se demuestran como válidos usando reglas de cuantificación. De manera semejante, no cualquier proposición lógicamente verdadera se puede certificar por el método de las tablas de verdad: algunas de ellas se *demuestran* usando reglas de cuantificación.

El método usado al demostrar la verdad lógica de las tautologías fue presentado en el Cap. 3. Una demostración de la verdad lógica de la tautología "$A \supset (A \vee B)$" puede escribirse como

→ 1.	A	
2.	$A \vee B$	1, Ad.
3.	$A \supset (A \vee B)$	1–2, C.P.

Al demostrar la verdad lógica de proposiciones que involucran cuantificadores tendremos que recurrir no solamente a la lista original de formas de argumento válidas elementales y al principio reforzado de la Demostración Condicional, sino también a nuestras reglas de cuantificación. Así, una demostración de la verdad lógica de la proposición "$(x)Fx \supset (\exists x)Fx$" se puede escribir como

→ 1.	$(x)Fx$	
2.	Fy	1, UI
3.	$(\exists x)Fx$	2, EG
4.	$(x)Fx \supset (\exists x)Fx$	1–3, C.P.

(Tal como al discutir la validez de los argumentos, en la discusión de la verdad lógica de las proposiciones explícitamente limitamos nuestras consideraciones a universos o modelos posibles no vacíos.)

Otras proposiciones lógicamente verdaderas que involucran cuantificadores requieren demostraciones más complicadas. Así, por ejemplo, la proposición lógicamente verdadera "$(x)Fx \supset \sim(\exists x) \sim Fx$" tiene la siguiente demostración:

1.	$(\exists x)\sim Fx$	
2.	$\sim Fy$	
3.	$(x)Fx$	
4.	Fy	3, **UI**
5.	$(x)Fx \supset Fy$	3–4, C.P.
6.	$\sim(x)Fx$	5, 2, M.T.
7.	$\sim(x)Fx$	1, 2–6, **EI**
8.	$(\exists x)\sim Fx \supset \sim(x)Fx$	1–7, C.P.
9.	$(x)Fx \supset \sim(\exists x)\sim Fx$	8, Trans., D.N.

De manera semejante, la verdad de "$\sim(\exists x)\sim Fx \supset (x)Fx$" se demuestra como sigue:

1.	$\sim(\exists x)\sim Fx$	
2.	$\sim Fy$	
3.	$(\exists x)\sim Fx$	2, **EG**
4.	$\sim Fy \supset (\exists x)\sim Fx$	2–3, C.P.
5.	Fy	4, 1, M.T., D.N.
6.	$(x)Fx$	5, **UG**
7.	$\sim(\exists x)\sim Fx \supset (x)Fx$	1–6, C.P.

Dadas las verdades lógicas establecidas por las dos demostraciones precedentes, las conjuntamos para obtener la equivalencia "$(x)Fx \equiv \sim(\exists x)\sim Fx$", que es una verdad lógica ya señalada en la Sec. 4.1. Como nuestra demostración de esta equivalencia no depende de las peculiaridades de la función proposicional "Fx", la equivalencia es válida para toda función proposicional. Y como nuestra demostración no depende de las particularidades de la variable "x", la equivalencia es válida no solamente para cualquier función proposicional sino también para cualquier variable individual. La *forma* de equivalencia $(\nu)\Phi\nu \equiv \sim(\exists\nu)\sim\Phi\nu$ se ve así que es *lógicamente verdadera* y puede agregarse a las otras equivalencias de nuestra lista de Reglas de Inferencia. Nos permite intercambiar válidamente $(\nu)\Phi\nu$ y $\sim(\exists\nu)\sim\Phi\nu$ siempre que ocurran. Esta conexión entre los dos cuantificadores por medio de la negación se adoptará ahora como una regla adicional de inferencia, y puede usarse al construir demostraciones formales de validez y demostraciones de verdad lógica. Cuando se use así las letras "QN" (para *negación de cuantificador*) debieran escribirse indicando el principio al que se está recurriendo. Debiera ser obvio que las formas

$$\sim(\nu)\Phi\nu \equiv (\exists\nu)\sim\Phi\nu$$
$$(\nu)\sim\Phi\nu \equiv \sim(\exists\nu)\Phi\nu$$
$$\sim(\nu)\sim\Phi\nu \equiv (\exists\nu)\Phi\nu$$

son lógicamente equivalentes entre sí y con la forma **QN** y, por lo tanto, son lógicamente verdaderas.

Algunas verdades lógicas obvias se enuncian en forma simple y con facilidad se demuestran con nuestra herramienta simbólica presente. Un bicondicional lógicamente verdadero para cualesquier funciones proposicionales "Fx" y "Gx" es

$$[(x)Fx \cdot (x)Gx] \equiv (x)(Fx \cdot Gx)$$

que asevera lo siguiente: cada cosa tiene el atributo F y cada cosa tiene el atributo G si y sólo si cada cosa tiene ambos atributos F y G. Las demostraciones de las dos implicaciones involucradas pueden escribirse una al lado de la otra:

→ 1.	$(x)Fx \cdot (x)Gx$	
2.	$(x)Fx$	1, Simp.
3.	$(x)Gx$	1, Simp.
4.	Fy	2, **UI**
5.	Gy	3, **UI**
6.	$Fy \cdot Gy$	4, 5, Conj.
7.	$(x)(Fx \cdot Gx)$	6, **UG**
8.	$[(x)Fx \cdot (x)Gx] \supset (x)(Fx \cdot Gx)$	1–7, C.P.

→ 1.	$(x)(Fx \cdot Gx)$	
2.	$Fy \cdot Gy$	1, **UI**
3.	Fy	2, Simp.
4.	Gy	2, Simp.
5.	$(x)Fx$	3, **UG**
6.	$(x)Gx$	4, **UG**
7.	$(x)Fx \cdot (x)Gx$	5, 6, Conj.
8.	$(x)(Fx \cdot Gx) \supset [(x)Fx \cdot (x)Gx]$	1–7, C.P.

Otra verdad lógica está en la forma de un condicional y no de un bicondicional. Se le escribe, como

$$[(x)Fx \vee (x)Gx] \supset (x)(Fx \vee Gx)$$

y afirma que si cada cosa o es un F o cada cosa es un G, entonces cada cosa es un F o un G. Su demostración involucra hacer varios supuestos de alcance limitado y se le puede escribir como

→ 1.	$(x)Fx \vee (x)Gx$	
→ 2.	$(x)Fx$	
3.	Fy	2, **UI**
4.	$Fy \vee Gy$	3, Ad.
5.	$(x)(Fx \vee Gx)$	4, **UG**
6.	$(x)Fx \supset (x)(Fx \vee Gx)$	2–5, C.P.
→ 7.	$(x)Gx$	
8.	Gy	7, **UI**
9.	$Fy \vee Gy$	8, Ad.
10.	$(x)(Fx \vee Gx)$	9, **UG**
11.	$(x)Gx \supset (x)(Fx \vee Gx)$	7–10, C.P.
12.	$[(x)Fx \supset (x)(Fx \vee Gx)] \cdot [(x)Gx \supset (x)(Fx \vee Gx)]$	6, 11, Conj.
13.	$(x)(Fx \vee Gx) \vee (x)(Fx \vee Gx)$	12, 1, C.D.
14.	$(x)(Fx \vee Gx)$	13, Taut.
15.	$[(x)Fx \vee (x)Gx] \supset (x)(Fx \vee Gx)$	1–14, C.P.

El recíproco de este condicional, sin embargo, *no* es lógicamente verdadero. El recíproco afirma que si todo elemento es un F o un G entonces o todo es F o todo es G. El que este recíproco no es siempre verdadero puede verse al reemplazar "G" por "$\sim F$" ya que "$(x)(Fx \vee \sim Fx)$" es verdadero para cualquier predicado "F" mientras que hay pocos predicados para los cuales se tiene "$(x)Fx \vee (x)\sim Fx$". Otra verdad lógica condicional en la forma es

$$(\exists x)(Fx \cdot Gx) \supset [(\exists x)Fx \cdot (\exists x)Gx]$$

Su demostración es totalmente directa y se deja como un ejercicio. Que su recíproca no es verdadera, en general, puede verse nuevamente al reemplazar "G" por "$\sim F$". Para la mayoría de los predicados "F" la proposición "$(\exists x)Fx \cdot (\exists x)\sim Fx$" es verdadera (es decir, "algo es redondo y algo no es redondo"), pero para cualquier "F" la proposición "$(\exists x)(Fx \cdot \sim Fx)$" es lógicamente falsa.

Ya se ha visto que las funciones proposicionales pueden contener proposiciones y/u otras funciones proposicionales como componentes. Ejemplos de funciones proposicionales semejantes son

$$Fx \cdot Ga,\ Fx \vee Fy,\ Gy \vee (z)Hz,\ Gw \supset Fz, \ldots$$

Cuando funciones proposicionales tales como éstas se cuantifican para obtener

$$(x)[Fx \cdot Ga],\ (x)[Fx \vee Fy],\ (\exists y)[Gy \vee (z)Hz],\ (z)[Gw \supset Fz], \ldots$$

tenemos proposiciones y/o funciones proposicionales que están dentro de los alcances de los cuantificadores, aunque los cuantificadores no tienen un efecto real sobre estas expresiones. Cuando un cuantificador respecto a una variable dada es prefijado a una expresión, su único efecto es el de ligar ocurrencias previamente libres de esa variable. En las expresiones antes escritas, las proposiciones "Ga" y "$(z)Hz$" y las funciones proposicionales "Fy" y "Gw", aunque se encuentran dentro de los alcances de los cuantificadores "(x)", "$(\exists y)$", "(x)" y "(z)" respectivamente, no están realmente afectadas por ellos. En dondequiera que se tenga una expresión que contiene un cuantificador sobre la variable μ y dentro de cuyo alcance se encuentra o una proposición o una función proposicional que no contiene ocurrencias libres de μ, la expresión total es lógicamente equivalente a otra expresión en la que el alcance del cuantificador sobre μ *no* se extiende sobre esta proposición o función proposicional. Un ejemplo o dos aclararán esta cuestión. En lo que sigue, sea "Q" o una proposición o una función proposicional que no contiene ocurrencias libres de la variable "x" y sea "Fx" una función proposicional que al menos contiene una ocurrencia libre de la variable "x". Nuestra primera equivalencia lógica es aquí entre la cuantificación universal de "$Fx \cdot Q$" y la conjunción de la cuantificación universal de "Fx" con "Q" que más brevemente se expresa como

$$(x)(Fx \cdot Q) \equiv [(x)Fx \cdot Q]$$

La demostración de esta equivalencia se puede escribir como

1.	$(x)(Fx \cdot Q)$	
2.	$Fx \cdot Q$	1, UI
3.	Fx	2, Simp.
4.	$(x)Fx$	3, UG
5.	Q	2, Simp.
6.	$(x)Fx \cdot Q$	4, 5, Conj.
7.	$(x)(Fx \cdot Q) \supset [(x)Fx \cdot Q]$	1–6, C.P.

1.	$(x)Fx \cdot Q$	
2.	$(x)Fx$	1, Simp.
3.	Fx	2, UI
4.	Q	1, Simp.
5.	$Fx \cdot Q$	3, 4, Conj.
6.	$(x)(Fx \cdot Q)$	5, UG
7.	$[(x)Fx \cdot Q] \supset (x)(Fx \cdot Q)$	1–6, C.P.

Otra equivalencia lógica también existe entre la cuantificación universal de "$Q \supset Fx$" y el enunciado condicional cuyo antecedente es "Q" y cuyo consecuente es la cuantificación universal de "Fx". La primera afirma que *dado cualquier individuo x, Q implica que x tiene F* y es equivalente a *Q implica que dado cualquier individuo x, x tiene F.* Nuestra expresión simbólica de esta equivalencia es

$$(x)(Q \supset Fx) \equiv [Q \supset (x)Fx]$$

Su demostración se construye fácilmente:

1.	$(x)(Q \supset Fx)$	
2.	$Q \supset Fx$	1, UI
3.	Q	
4.	Fx	2, 3, M.P.
5.	$(x)Fx$	4, UG
6.	$Q \supset (x)Fx$	3–5, C.P.
7.	$(x)(Q \supset Fx) \supset [Q \supset (x)Fx]$	1–6, C.P.

1.	$Q \supset (x)Fx$	
2.	Q	
3.	$(x)Fx$	1, 2, M.P.
4.	Fx	3, UI
5.	$Q \supset Fx$	2–4, C.P.
6.	$(x)(Q \supset Fx)$	5, UG
7.	$[Q \supset (x)Fx] \supset (x)(Q \supset Fx)$	1–6, C.P.

El mismo esquema de equivalencia se tiene para la cuantificación existencial de "$Q \supset Fx$" y el enunciado condicional "$Q \supset (\exists x)Fx$". El primero asegura *que al menos hay un individuo x tal que Q implica que x tiene F* y es equivalente a *Q implica que cuando menos hay un individuo x tal que x tiene F* que es lo afirmado por el segundo. Su demostración se construye muy fácilmente, y queda como ejercicio.

Sin embargo, el esquema de equivalencia es diferente cuando "Q" ocurre como consecuente y no como antecedente. Aunque la cuantificación universal de "$Fx \supset Q$" implica "$(x)Fx \supset Q$" no es implicada por la última. Hay una equivalencia, sin embargo, entre *dado cualquier x, si x tiene F entonces* Q y *si hay cuando menos un x tal que x tiene F, entonces* Q, que se estableció informalmente en el párrafo 4 de este capítulo y se expresa simbólicamente como

$$(x)(Fx \supset Q) \equiv [(\exists x)Fx \supset Q]$$

Y aunque la cuantificación existencial de "$Fx \supset Q$" está implicada por "$(\exists x)Fx \supset Q$", no implica la última. Hay una equivalencia, sin embargo, entre *hay cuando menos un x tal que si x tiene F entonces* Q y *si dado cualquier x, x tiene F entonces* Q que se expresa simbólicamente como

$$(\exists x)(Fx \supset Q) \equiv [(x)Fx \supset Q]$$

Esta equivalencia lógica proporciona un método alternativo para simbolizar una de las proposiciones discutidas en la Sec. 4.4:

Si algo está mal en la casa, entonces todos en la casa se quejan.

La traducción dada ahí se abrevia a

$$(\exists x)Wx \supset (y)(Py \supset Cy)$$

que como acabamos de observar es lógicamente equivalente a

$$(x)[Wx \supset (y)(Py \supset Cy)]$$

Concluiremos nuestra discusión de las proposiciones lógicamente verdaderas que involucran cuantificadores dirigiendo nuestra atención a cuatro proposiciones lógicamente verdaderas que no son equivalencias ni condicionales. Corresponden en cierto sentido a nuestras reglas de cuantificación:

1. $(y)[(x)Fx \supset Fy]$
2. $(y)[Fy \supset (\exists x)Fx]$
3. $(\exists y)[Fy \supset (x)Fx]$
4. $(\exists y)[(\exists x)Fx \supset Fy]$

La primera de éstas corresponde a **UI** al decir, como de hecho dice, que dado cualquier individuo y si cualquier individuo tiene el atributo F entonces y lo tiene. Su demostración es casi trivialmente obvia y procede como a continuación:

→ 1.	$(x)Fx$	
2.	Fz	1, **UI**
3.	$(x)Fx \supset Fz$	1–2, C.P.
4.	$(y)[(x)Fx \supset Fy]$	3, **UG**

La segunda corresponde a **EG** al afirmar que si cualquier individuo dado y tiene el atributo F entonces algo tiene F. La tercera y la cuarta correspondientes a **UG** y **EI** no son tan obvias de forma inmediata, pero son lógicamente verdaderas y se demuestran con mucha facilidad. Puede darse una explicación intuitiva por referencia al general y estadista ateniense Arístides, con frecuencia llamado "El justo". Tan sobresaliente era Arístides por su rectitud que los atenienses adoptaron el dicho:

Si alguien es justo, Arístides es justo.

Con respecto a *cualquier* atributo, siempre hay un individuo y tal que si cualquier cosa tiene el atributo, y lo tiene. Eso es lo afirmado por la cuarta proposición de antes que corresponde a **EI**. El asunto puede describirse de otra manera. Si nos ocupamos no del atributo de ser justo sino de su inverso, el atributo de ser corruptible, entonces el sentido del primer dicho ateniense también se expresa

Si Arístides es corruptible, entonces cualquiera es corruptible.

Generalizando otra vez, podemos observar que respecto a *cualquier* atributo siempre hay algún individuo y tal que si y tiene ese atributo todo tiene ese atributo. Esto es lo que se afirma en la tercera proposición de antes que corresponde a **UG**. Su demostración procede como:

→ 1.	$\sim(\exists y)[Fy \supset (x)Fx]$	
2.	$(y)\sim[Fy \supset (x)Fx]$	1, **QN**
3.	$\sim[Fy \supset (x)Fx]$	2, **UI**
4.	$Fy \cdot \sim(x)Fx$	3, Impl.
5.	Fy	4, Simp.
6.	$(x)Fx$	5, **UG**
7.	$(x)Fx \vee (\exists y)[Fy \supset (x)Fx]$	6, Ad.
8.	$\sim(x)Fx$	4, Simp.
9.	$(\exists y)[Fy \supset (x)Fx]$	7, 8, D.S.
10.	$\sim(\exists y)[Fy \supset (x)Fx] \supset (\exists y)[Fy \supset (x)Fx]$	1–9, C.P.
11.	$(\exists y)[Fy \supset (x)Fx] \vee (\exists y)[Fy \supset (x)Fx]$	10, Impl., D.N.
12.	$(\exists y)[Fy \supset (x)Fx]$	11, Taut.

Aunque no lo demostraremos sino en el Cap. 9, los métodos de demostración hasta ahora construidos (técnicas para la "Deducción Natural", como a veces se les llama) permiten la demostración de todas las proposiciones lógicamente verdaderas formadas mediante conectivos de función de verdad y la cuantificación de variables individuales. También se demostrará que *solamente* las proposiciones que son lógicamente verdaderas se pueden demostrar con estas técnicas.

EJERCICIOS

Construir demostraciones para las siguientes en donde Q es o una proposición o una función proposicional sin ocurrencias libres de la variable "x":

1. $(x)(Fx \supset Q) \equiv [(\exists x)Fx \supset Q]$
2. $(\exists x)(Fx \cdot Gx) \supset [(\exists x)Fx \cdot (\exists x)Gx]$
3. $(x)(Fx \supset Gx) \supset [(x)Fx \supset (x)Gx]$
***4.** $[(\exists x)Fx \supset (\exists x)Gx] \supset (\exists x)(Fx \supset Gx)$
5. $(\exists x)(Q \supset Fx) \equiv [Q \supset (\exists x)Fx]$
6. $(\exists x)(Fx \cdot Q) \equiv [(\exists x)Fx \cdot Q]$
7. $(x)(Fx \vee Q) \equiv [(x)Fx \vee Q]$
***8.** $(\exists x)(Fx \vee Q) \equiv [(\exists x)Fx \vee Q]$
9. $(\exists x)(Fx \supset Q) \equiv [(x)Fx \supset Q]$
10. $(y)[Fy \supset (\exists x)Fx]$
11. $(\exists y)[(\exists x)Fx \supset Fy]$
***12.** $[(\exists x)Fx \vee (\exists x)Gx] \equiv (\exists x)(Fx \vee Gx)$
13. $(x)(\exists y)(Fx \cdot Gy) \equiv (\exists y)(x)(Fx \cdot Gy)$
14. $(x)(\exists y)(Fx \vee Gy) \equiv (\exists y)(x)(Fx \vee Gy)$
15. $(x)(\exists y)(Fx \supset Gy) \supset [(x)Fx \supset (\exists y)Gy]$

5

La Lógica de las Relaciones

5.1. Símbolos para las Relaciones

Algunas proposiciones que contienen dos o más nombres propios (de individuos) correctamente se entienden como compuestos de función de verdad de proposiciones singulares con diferentes términos sujetos. Por ejemplo, la proposición

Lincoln y Grant fueron presidentes.

se comprende correctamente como la conjunción de las dos proposiciones singulares

Lincoln fue un presidente y Grant fue un presidente.

Pero para algunas otras proposiciones que tienen el mismo esquema verbal ese análisis es enteramente insatisfactorio. Así, la proposición

Lincoln y Grant eran amigos.

definitivamente *no* es una conjunción o cualquier otra función de verdad de

Lincoln era amigo y Grant era amigo*

Por el contrario, al dividir la proposición de esta manera se destruye su significación, puesto que lo que quiere decir no es que ambos Lincoln y Grant fuesen amigos sino que eran *amigos el uno del otro*. La proposición dada no asevera que Lincoln y Grant tuviesen ambos un cierto *atributo* sino que estaban en cierta *relación*. No se dice simplemente que Lincoln fuese amigo (signifique esto lo que signifique), sino que era *amigo* de Grant. Otras proposiciones que expresan relaciones entre dos individuos son

Juan ama a María.

Platón fue un estudiante de Sócrates.

---

* En el original, "were acquainted" r dein "se conocían". En la forma traducida es más claro el ejemplo aunque *no* históricamente verdadero. (N. del T.)

Isaac era un hijo de Abraham.
Nueva York está al oriente de Chicago.
Chicago es más pequeño que Nueva York.

Relaciones como éstas que pueden darse entre dos individuos son llamadas *binarias* o *diádicas*. Otras relaciones pueden relacionar tres o más individuos. Por ejemplo las proposiciones

Detroit está entre Nueva York y Chicago.
Elena presentó a Juan, a María.
Norteamérica le ganó las Filipinas a España.

expresan relaciones *ternarias* o *triádicas*, mientras que las proposiciones siguientes expresan relaciones *cuaternarias* o *tetrádicas:*

Estados Unidos compró Alaska a Rusia por 7 millones de dólares.
Juan trocó su vaca al traficante por un puñado de habas.
Alberto, Guillermo, Carlos y Ricardo jugaron bridge juntos.

Las relaciones entran en los argumentos de varias maneras. Un ejemplo de un argumento relacional es

Alberto es mayor que Guillermo.
Guillermo es mayor que Carlos.

Por lo tanto, Alberto es mayor que Carlos.

Un ejemplo un tanto más complicado que involucra la cuantificación es

A Elena le gusta David.
cualquiera A que le guste David le gusta Tomás.
A Elena sólo le gustan los hombres bien parecidos.

Por lo tanto, Tomás es un hombre bien parecido.

Una inferencia aún un poco más compleja que involucra cuantificación múltiple es la siguiente:

Todos los caballos son animales.

Por lo tanto, la cabeza de un caballo es la cabeza de un animal.

Esta última es una inferencia válida que, como observó De Morgan, no podría hacerse con toda la lógica aristotélica. Hacerla válida con nuestra herramienta de cuantificadores y funciones proposicionales es lo que nos proponemos en la sección siguiente.

Antes de discutir demostraciones de validez para argumentos relacionales (que no requerirán más métodos de demostración que los que desarrollamos en el capítulo precedente) debemos tratar el problema de *simbolizar* las proposiciones relacionales. Así como un símbolo de predicado puede ocurrir en diferentes proposiciones, también un solo símbolo de relación puede ocurrir en diferentes proposiciones. Así como tenemos el predicado "humano" común a las proposiciones:

> Aristóteles es humano.
> Platón es humano.
> Sócrates es humano.

así también tenemos la palabra de relación "enseñó" común a las proposiciones

> Sócrates enseñó a Platón.
> Platón enseñó a Aristóteles.

Y así como consideramos las tres proposiciones sujeto-predicado como instancias de sustitución diferentes de la función proposicional "x es humano", así también podemos considerar las dos proposiciones relacionales como instancias diferentes de sustitución de la función proposicional "x enseñó a y". Reemplazando la variable "x" por la constante "Sócrates" y la variable "y" por la constante "Platón" obtenemos la primera proposición; reemplazando la "x" por "Platón" y la "y" por "Aristóteles" nos da la segunda. El *orden* del reemplazo es de mucha importancia aquí: si "x" se reemplaza por "Aristóteles" y "y" por "Platón", el resultado es la proposición *falsa*

> Aristóteles enseñó a Platón.

Así como una función proposicional de una variable tal como "x es humano" se abreviaba "Hx", así también una función proposicional de dos variables tal como "x enseñó a y" se abrevia "Exy". De manera semejante, la función proposicional "x está entre y y z" se abreviará "$Bxyz$", y la función proposicional "x cambió y a z por w" se abreviará "$Txyzw$". Nuestro primer ejemplo de un argumento relacional no involucra cuantificadores y se simboliza muy fácilmente. Usando las constantes individuales a, b y c para denotar Alberto, Guillermo y Carlos y la expresión "Mxy" para abreviar "x es mayor que y" tenemos

$$\begin{array}{l} Mab \\ Mbc \\ \hline \therefore Mac \end{array}$$

Nuestro segundo argumento no es mucho más difícil, pues ninguna de sus proposiciones contiene más de un solo cuantificador. Usando las constantes individuales "h", "d" y "t" para denotar Helen, David y Tomás, respectivamente, "Gx" para abreviar "x es un hombre bien parecido" y el símbolo "Lxy" para abreviar "a x le gusta y", el argumento se puede simbolizar como

1. Lhd
2. $(x)(Lxd \supset Lxt)$
3. $(x)(Lhx \supset Gx)$

$\therefore Gt$

Una demostración de su validez se construye con tanta facilidad que podemos escribirla de una vez. Refiriéndonos a las premisas numeradas anteriormente la demostración procede como:

4.	$Lhd \supset Lht$	2, UI
5.	Lht	4, 1, M.P.
6.	$Lht \supset Gt$	3, UI
7.	Gt	6, 5, M.P.

Simbolizar las proposiciones relacionales se hace más complicado cuando son varios los cuantificadores que ocurren en una proposición. Nuestra discusión del problema se verá simplificada limitando nuestras consideraciones para empezar a las dos constantes individuales "a" y "b" y la función proposicional "x atrae y" que se abrevia "Axy". Los dos enunciados "a atrae b" y "b es atraído por a" tienen obviamente el mismo significado, el primero expresando el significado con el uso de una *voz activa,* y el segundo con el uso de una *voz pasiva.* Ambos enunciados se traducen directamente en la única fórmula "Aab". De manera semejante, los dos enunciados "b atrae a" y "a es atraído por b" se simbolizan ambos por la fórmula "Aba". Estas dos diferentes instancias de sustitución de "Axy" son lógicamente independientes entre sí, pues una puede ser verdadera sin acarrear la verdad de la otra.

Estamos todavía en un terreno elemental y bien conocido cuando simbolizamos

"a atrae todo"
"todo es atraído por a" } como "$(x)Aax$",

"a atrae algo"
"algo es atraído por a" } como "$(\exists x)Aax$",

"todo atrae a"
"a es atraído por todo" } como "$(x)Axa$",

"algo atrae a"
"a es atraído por algo" } como "$(\exists x)Axa$".

Pero el problema de simbolizar se hace más complejo cuando dejamos por completo de usar las constantes individuales y consideramos proposiciones relacionales que son completamente generales. Las más simples proposiciones de esta clase son

1. Todo atrae todo.
2. Todo es atraído por todo.
3. Algo atrae algo.
4. Algo es atraído por algo.
5. Nada atrae cosa alguna.
6. Nada es atraído por cosa alguna.

que se simbolizan con las fórmulas:

1. $(x)(y)Axy$
2. $(y)(x)Axy$
3. $(\exists x)(\exists y)Axy$
4. $(\exists y)(\exists x)Axy$
5. $(x)(y){\sim}Axy$
6. $(y)(x){\sim}Axy$

En sus formulaciones en el lenguaje español las proposiciones 1 y 2 son claramente equivalentes entre sí, como lo son 3 y 4 y 5 y 6. Las dos primeras equivalencias fácilmente se establecen para las traducciones simbólicas correspondientes:

→ 1.	$(x)(y)Axy$	
2.	$(y)Awy$	1, UI
3.	Awv	2, UI
4.	$(x)Axv$	3, **UG**
5.	$(y)(x)Axy$	4, **UG**
6.	$(x)(y)Axy \supset (y)(x)Axy$	1–5, C.P.

→ 1.	$(\exists x)(\exists y)Axy$	
→ 2.	$(\exists y)Awy$	
→ 3.	Awv	
4.	$(\exists x)Axv$	3, **EG**
5.	$(\exists y)(\exists x)Axy$	4, **EG**
6.	$(\exists y)(\exists x)Axy$	2, 3–5, **EI**
7.	$(\exists y)(\exists x)Axy$	1, 2–6, **EI**
8.	$(\exists x)(\exists y)Axy \supset (\exists y)(\exists x)Axy$	1–7, C.P.

Estas demuestran la verdad lógica de los condicionales más que de las equivalencias, pero sus inversos se pueden establecer siguiendo el mismo esquema de argumento. (La equivalencia entre las Fórmulas 5 y 6 claramente se establece siguiendo el mismo modelo de argumento que demuestra la equivalencia entre 1 y 2.)

Cuando consideramos los 2 siguientes enunciados

7. Todo atrae algo.
8. Algo es atraído por todo.

no hay ya equivalencia lógica o el mismo significado. La oración 7 no es enteramente libre de ambigüedad y en algunos contextos excepcionales podría alterarse su significado, pero su interpretación más natural *no* es que hay una cosa que es atraída por todas las cosas, sino que todo atrae *una cosa u otra*. La simbolizamos por sucesivas paráfrasis escribiendo primero

$$(x)(x \text{ atrae algo})$$

y entonces simbolizando la expresión "*x* atrae algo" del mismo modo en que simbolizamos "*a* atrae algo". Esto nos da la fórmula

7. $(x)(\exists y)Axy$

La oración 8 también es susceptible de interpretaciones alternativas una de las cuales la haría sinónima de la oración 7 significando que una u otra cosa es atraída por una cosa (dada). Pero una manera perfectamente directa de entender la oración 8 es tomarla como aseveración de que *alguna cosa* es atraída por todas las cosas. También se le simboliza paso a paso escribiendo primero

$$(\exists y)(y \text{ es atraído por todas las cosas})$$

y entonces simbolizando la expresión "*y* es atraído por todo" del mismo modo que simbolizamos "*a* es atraído por todo". Esto nos da la fórmula

8. $(\exists y)(x)Axy$

Hay cierta semejanza *equívoca* entre las Fórmulas 7 y 8. Ambas consisten en una función proposicional, "*Axy*", a la que se aplica un cuantificador universal con respecto a "*x*" y un cuantificador existencial con respecto a "*y*". Pero el *orden* en el que los cuantificadores están escritos es diferente en cada caso, y eso hace un mundo de diferencia entre sus significados. La Fórmula 7 en la que el cuantificador universal se presenta primero afirma que dada cualquier cosa hay alguna u otra cosa que la cosa dada atrae. Pero la Fórmula 8 en que el cuantificador existencial viene primero afirma que hay cierta cosa tal que cada cosa *la* atrae. Si 2 cuantificadores se aplican sucesivamente a una función proposicional y si ambos son universales o ambos existenciales su orden no importa como se muestra con la equivalencia de las Fórmulas 1 y 2, 3 y 4, y 5 y 6. Pero si un cuantificador es universal y el otro existencial, el orden de generalización o cuantificación es de gran importancia.

Aunque las Fórmulas 7 y 8 no son equivalentes, no son independientes. La primera es válidamente deducible de la segunda. La demostración es fácil como se ve a continuación:

1. $(\exists y)(x)Axy$
2. $(x)Axv$
3. Auv 2, **UI**
4. $(\exists y)Auy$ 3, **EG**
5. $(\exists y)Auy$ 1, 2–4, **EI**
6. $(x)(\exists y)Axy$ 5, **UG**

Pero la inferencia es válida solamente en una dirección. Todo intento de deducir la Fórmula 8 a partir de la 7 inevitablemente violará una de las restricciones impuestas a **UG**. El argumento

$$(x)(\exists y)Axy$$
$$\therefore (\exists y)(x)Axy$$

fácilmente se demuestra que es inválido por el método de la Sec. 4.3. Para un modelo que sólo contenga los 2 individuos a y b, el argumento dado es lógicamente equivalente al argumento de función de verdad

$$(Aaa \vee Aab) \cdot (Aba \vee Abb)$$
$$\therefore (Aaa \cdot Aba) \vee (Aab \cdot Abb)$$

que se demuestra que es inválido asignándole el valor **T** a "*Aaa*" y "*Abb*" y el valor **F** a "*Aab*" y "*Aba*".

Un par semejante de proposiciones no equivalentes puede escribirse como

9. Todo es atraído por algo.
10. Algo atrae todo.

Estas claramente son no equivalentes cuando el "algo" de 9 que viene al final se entiende como "una u otra cosa" y el algo en 10 que viene al principio se entiende como "una cierta cosa". Se les simboliza como

9. $(y)(\exists x)Axy$
10. $(\exists x)(y)Axy$

Las proposiciones relacionales a veces se formulan como si fueran simples aseveraciones sujeto-predicado. Por ejemplo, "*a* fue golpeado" tiene como interpretación más plausible que "*algo golpeó a a*". Estas ocurrencias implícitas de relaciones frecuentemente se señalan usando la voz pasiva de un verbo transitivo. Nuestra simbolización de proposiciones que contienen relaciones implícitas debiera guiarse por la consideración del uso al que se destinan. Nuestro propósito al simbolizar argumentos es el de ponerlos en una forma conveniente para probar su validez. Nuestro objeto, por lo tanto, con respecto a un argumento dado, no es el de proporcionar un análisis teórico completo sino proporcionar un análisis suficientemente completo para el propósito en cuestión —probar la validez—. En consecuencia, algunas relaciones implícitas pueden dejarse implícitas mientras que otras requieren un análisis mayor, como quedará claro en un ejemplo. Considerar el argumento

> Quienquiera que haya visitado el edificio fue observado. Cualquiera que haya observado a Andrews tendría que recordarle. Nadie recordó a Andrews. Por lo tanto, Andrews no visitó el edificio.

La primera proposición de este argumento contiene dos relaciones, explícita la una, implícita la otra. Explícitamente tenemos la relación de *alguien visitando el edificio*. Es explícita porque se hace mención tanto del visitante como de lo que fue visitado por él. Implícitamente tenemos la relación de *alguien observando a alguien*, que queda implícita porque no se hace mención del alguien que observa —marcando la omisión por el uso de la voz pasiva—. Sin embargo, como la única otra ocurrencia de "x visitó el edificio" es también una *unidad*, en la conclusión, no necesita tratarse como relación en absoluto, sino que se le puede simbolizar como un simple predicado. Por otro lado, como "x observó a y", a pesar de que su ocurrencia es meramente implícita en la primera premisa, se le debe explícitamente simbolizar como una relación sí se quiere demostrar la validez del argumento. Pues su segunda ocurrencia no es una simple repetición de la unidad original; en lugar de eso aparece como una relación explícita con la primera variable cuantificada y la segunda reemplazada por el nombre propio "Andrews". Usando "a" para denotar Andrews, "Vx" para abreviar "x visitó el edificio", "Oxy" para abreviar "x observó a y" y "Rxy" para abreviar "x recuerda a y", una traducción simbólica y demostración de validez para el argumento dado se puede escribir como,

1.	$(x)[Vx \supset (\exists y)Oyx]$	
2.	$(x)[Oxa \supset Rxa]$	
3.	$(x){\sim}Rxa$	$/ \therefore {\sim}Va$
4.	$Oza \supset Rza$	2, UI
5.	${\sim}Rza$	3, UI
6.	${\sim}Oza$	4, 5, M.T.
7.	$(y){\sim}Oya$	6, UG
8.	${\sim}(\exists y)Oya$	7, QN
9.	$Va \supset (\exists y)Oya$	1, UI
10.	${\sim}Va$	9, 8, M.T.

Nuestra demostración de validez para este argumento no se hubiera mejorado en lo absoluto simbolizando "Andrews visitó el edificio" como una instancia de sustitución de la proposición relacional "x visitó y" en lugar de la más simple "Vx". Pero nuestra demostración de validez dependía de nuestra manera de simbolizar "fue observado" explícitamente como una relación.

Casi todos nuestros ejemplos anteriores eran ilustraciones de generalidad *ilimitada*, en los que se aseguraba que *toda cosa* estaba en tal y cual relación, o algo lo estaba, o nada lo estaba. Muchas proposiciones relacionales no son tan "categóricas". La mayoría de las aserciones son más modestas afirmando no que *toda cosa* está en tal y cual relación sino que toda cosa lo hace *si* satisface ciertas condiciones o restricciones. Así podemos decir que

Todo es atraído por todos los imanes.

o que

Todo lo que sea de hierro es atraído por todos los imanes.

La segunda es, desde luego, la más modesta de las dos afirmaciones siendo menos *general* que la primera. Mientras que la primera se simboliza adecuadamente como

$$(x)(y)[My \supset Ayx]$$

donde "Mx" abrevia "x es un imán"; la segunda se simboliza

$$(x)[Ix \supset (y)(My \supset Ayx]$$

donde "Ix" abrevia "x está hecho de hierro". Que esta traducción simbólica es correcta podemos verlo parafraseando la segunda proposición como,

Dada cualquier cosa, en absoluto, *si* está hecha de hierro entonces es atraída por todos los imanes.

Tal vez la mejor manera de traducir las proposiciones relacionales a nuestro simbolismo lógico es el proceso paso a paso que ya hemos ilustrado. Usémoslo nuevamente esta vez para proposiciones de generalidad limitada. Consideremos primero la proposición

Cualquier buen aficionado puede vencer a algún profesional.

Como primer paso escribimos

$(x)\{(x$ es un buen aficionado$) \supset (x$ puede vencer a algún profesional$)\}$.

A continuación el consecuente del condicional entre corchetes

x puede vencer a algún profesional

se simboliza como una generalización de la expresión cuantificada:

$(\exists y)[(y$ es un profesional$) \cdot (x$ puede vencer a $y)]$

Ahora, usando las abreviaciones obvias, "Gx", "Px" y "Bxy" para "x es un buen aficionado", "x es un profesional" y "x puede vencer a y", la proposición dada se simboliza mediante la fórmula

$$(x)[Gx \supset (\exists y)(Py \cdot Bxy)]$$

Usando el mismo método de parafrasear por etapas podemos simbolizar

Algunos profesionales pueden vencer a todos los aficionados.

primeramente como

$(\exists x)$[(x es un profesional) · (x puede vencer a todos los aficionados)]

luego como

$(\exists x)${(x es un profesional) · (y)[(y es aficionado) $\supset$ (x puede vencer a y)]}.

Y finalmente (usando abreviaciones) como

$$(\exists x)[Px \cdot (y)(Ay \supset Bxy)]$$

El mismo método es aplicable en casos más complejos en los que se ve involucrada más de una relación. Podemos simbolizar la proposición

Cualquiera que prometa todo a todos está seguro de decepcionar a alguien.

la parafraseamos primeramente como

(x){[(x es una persona) · (x promete todo a todos)] $\supset$ [x decepciona a alguien]}

El segundo conyunto del antecedente

x promete todo a todos

puede parafrasearse primeramente como

(y)[(y es una persona) $\supset$ (x promete todo a y)]

y entonces como

(y)[(y es una persona) $\supset$ (z)(x promete z a y)]

El consecuente en nuestra primera paráfrasis

x decepciona a alguien

tiene su estructura más explícitamente revelada escribiéndola de nuevo como

$(\exists u)$[(u es una persona) · (x decepciona a u)]

La proposición original puede ahora reescribirse como

$$(x)\{\{(x \text{ es una persona}) \cdot (y)[(y \text{ es una persona}) \supset (z)(x \text{ promete } z \text{ a } y)]\} \supset (\exists u)[(u \text{ es una persona}) \cdot (x \text{ decepçiona a } u)]\}$$

Usando las abreviaciones obvias, "*Px*", "*Pxyz*", "*Dxy*" para "*x* es una persona", "*x* promete *y* a *z*" y "*x* decepciona a *y*", la proposición puede expresarse de forma más compacta en la fórmula

$$(x)\{\{Px \cdot (y)[Py \supset (z)Pxzy]\} \supset (\exists u)(Pu \cdot Dxu)\}$$

Con la práctica, desde luego, no se hace necesario escribir todos estos pasos intermedios explícitamente.

Las palabras de cuantificación tales como "quienquiera" se refieren a *todas las personas* y no a *todas las cosas*; y palabras de cuantificación tales como "alguien" se refieren a *algunas personas* y no a *algunas cosas*. Frecuentemente, es deseable representar esta referencia en nuestro simbolismo. Pero hacerlo no siempre es necesario, si de lo que se trata es de evaluar argumentos que contienen a estas palabras y la elección de los símbolos se determina sobre la misma base sobre la que se decide si una cláusula o frase relacional ha de simbolizarse explícitamente como una relación o como un simple atributo.

Las palabras "siempre", "nunca" y "algunas veces" frecuentemente tienen un significado intemporal como en las proposiciones

Los hombres buenos siempre tienen amigos.
Los hombres malos nunca tienen amigos.
Los hombres que no tienen esposa a veces tienen amigas.

que se pueden simbolizar con las abreviaciones obvias, como

$$(x)[(Gx \cdot Mx) \supset (\exists y)Fxy]$$
$$(x)[(Bx \cdot Mx) \supset \sim(\exists y)Fxy]$$
$$(\exists x)\{[Mx \cdot \sim(\exists y)(Wy \cdot Hxy)] \cdot (\exists z)Fxz\}$$

Sin embargo, algunos usos de estas palabras son definitivamente temporales, y cuando lo sean es posible simbolizarlas usando la maquinaria lógica ya disponible, así como se puede con otras palabras temporales tales como "mientras que", "cuando", "siempre que" y similares. Un ejemplo o dos debieran aclarar este asunto. La proposición

Ricardo siempre escribe a Martha cuando están separados.

afirma que todas las veces en que Ricardo y Martha se separan son veces en que Ricardo escribe a Martha. Esto se puede simbolizar usando "Tx" para "x es un tiempo (o una vez)", "$Wxyz$", para "x escribe a y en el tiempo z" y "$Sxyz$" para simbolizar "x y y están separados en el tiempo z", de la forma

$$(x)\{Tx \supset [Sdjx \supset Wdjx]\}$$

Tal vez la ilustración más gráfica de la adaptabilidad de nuestra actual notación la tenemos al simbolizar la "siguiente observación, usualmente atribuida a Lincoln:

> Se puede engañar a alguna gente todo el tiempo, y a toda la gente parte del tiempo, pero no se puede engañar a toda la gente todo el tiempo.

El primer conjunto: "se puede engañar a alguna gente todo el tiempo" es ambiguo. Se puede tomar como significado o que *existe al menos una persona que siempre puede ser engañada* o que *para cualquier tiempo existe al menos una persona (u otra) que puede ser engañada en ese tiempo o esa vez.* Adoptando la primera interpretación y usando Px para "x es una persona", "Tx" para "x es un tiempo" y "Fxy" para "se puede engañar a x en (o durante) y" lo anterior se puede simbolizar como

$$\{(\exists x)[Px \cdot (y)(Ty \supset Fxy)] \cdot (\exists y)[Ty \cdot (x)(Px \supset Fxy)]\} \cdot (\exists y)(\exists x)[Ty \cdot Px \cdot \sim Fxy]$$

Probar los argumentos relacionales no presenta nuevos problemas una vez efectuada la traducción al simbolismo lógico. Esta parte es la más problemática de modo que proveemos un buen número de ejercicios para que el estudiante los haga antes de proseguir.

EJERCICIOS

I. Usando el siguiente "vocabulario", traducir cada una de las fórmulas dadas al lenguaje ordinario:

Ax-x es plata	Axy-x ayuda y
Bx-x es dichoso	Bxy-x pertenece a y
Cx-x es una nube	$Bxyz$-x pide prestado y a z
Dx-x es un perro	Cxy-x puede ordenar a y
Ex-x es humo	Dxy-x es realizado en (o por) y
Fx-x es fuego	Exy-x trasquila a y, x rapa a y
Gx-x es vidrio	Fxy-x es justo con y
Hx-x es una casa	Gxy-x recolecta y
Ix-x está enfermo	Hxy-x oye a y
Jx-x es trabajo	Ixy-x vive en y
Kx-x es un lino	Jxy-x es compadre de y
Lx-x es una oveja	Kxy-x conoce a y
Mx-x es musgo	Lxy-x le gusta y
Nx-x es bueno	Mxy-x es el patrón de y
Ox-x es un tonto	Nxy-x pierde y

Px-x es una persona	Oxy-x es juzgado por y
Qx-x es un lugar	$Pxyz$-x echa a perder y a z
Rx-x rueda	Qxy-x le hace compañía a y
Sx-x es una piedra	Rxy-x es como y
Tx-x es un negocio	Sxy-x dice y
Ux-x es una casa	Txy-x debiera lanzar y
Vx-x es una mujer	$Txyz$-x modera y a z
Wx-x es viento	Uxy-x viene a y
Xx-x es un tiempo	Vxy-x se aventura a y
Yx-x es un día	Wxy-x está en y
Zx-x espera	Xxy-x es padre de y

g-Dios

Fórmulas

*1. $(x)[Dx \supset (\exists y)(Yy \cdot Byx)]$
2. $(x)[(\exists y)(Py \cdot Fxy) \supset (z)(Pz \supset Fxz)]$
3. $(x)[(Rx \cdot Sx) \supset (y)(My \supset \sim Gxy)]$
4. $(x)[(Px \cdot Axx) \supset (Agx)]$
*5. $(x)[(Px \cdot Zx) \supset (y)(Uyx)]$
6. $(x)[Hx \supset (y)(Qy \supset \sim Ryx)]$
7. $(x)[(Px \cdot \sim Nxg) \supset (y)(\sim Nxy)]$
8. $(x)[(Px \cdot \sim Cxx) \supset (y)(Py \supset \sim Cxy)]$
9. $(x)\{Cx \supset (\exists y)[(Ay \cdot Ky) \cdot Byx]\}$
*10. $(x)[Px \supset (y)(Qxy \supset Oxy)]$
11. $(x)\{Qx \supset [(\exists y)(Ey \cdot Wyx) \supset (\exists z)(Fz \cdot Wzx)]\}$
12. $(x)\{[Px \cdot (y)(Ty \supset Jxy)] \supset (z)(Tz \supset \sim Mxz)\}$
13. $(x)\{[Px \cdot (\exists y)[(Gy \cdot Uy) \cdot Ixy]] \supset (z)(Sz \supset \sim Txz)\}$
14. $(x)\{[Px \cdot (y)(Lxy \supset Sxy)] \supset (\exists z)(Hxz \cdot \sim Lxz)\}$
*15. $(x)\{[Wx \cdot (y)[Py \supset \sim(\exists z)(Nz \cdot Pxzy)]] \supset Ix\}$
16. $(x)\{[Px \cdot (y)(\sim Vxy)] \supset (z)(\sim Gxz)\}$
17. $(x)\{Vx \supset (y)[Xy \supset (\exists z)[(Jz \cdot Bzx) \cdot \sim Dzy]]\}$
18. $(x)\{[Lx \cdot (\exists y)(Py \cdot Eyx)] \supset (z)(Wz \supset Tgzx)\}$
19. $(x)\{Px \supset (\exists y)[Py \cdot (\exists z)(Bxzy)]\}$
*20. $(x)\{Px \supset (\exists y)[Py \cdot (\exists z)(\sim Bxzy)]\}$
21. $(x)\{Px \supset (y)[Py \supset (z)(\sim Bxzy)]\}$
22. $(x)\{Px \supset (y)[Py \supset (\exists z)(\sim Bxzy)]\}$
23. $(x)[(Nx \cdot Dx) \supset (y)(Lxy \supset Myx)]$
24. $(x)[Px \supset (\exists y)(Py \cdot Xyx)] \cdot (\exists u)[Pu \cdot (v)(Pv \supset \sim Xuv)]$
25. $(x)\{[Qx \cdot (y)\{[(Py \cdot Wyx) \cdot (z)(\sim Kyz)] \supset By\}] \supset (u)\{[(Pu \cdot Wux) \cdot (v)(Kuv)] \supset Ou\}\}$

II. Simbolizar las siguientes oraciones usando en cada caso los símbolos indicados:

*1. Los hombres muertos no cuentan cuentos. (Dx: x está muerto. Mx: x es un hombre. Tx: x es un cuento. Txy: x cuenta y.)

2. Un abogado que aboga por su propio caso tiene a un tonto como cliente. (Ax: x es un abogado. Tx: x es un tonto. Axy: x aboga por el caso de y. Cxy: x es un cliente de y.)
3. Un león muerto es más peligroso que un perro vivo. (Lx: x es un león. Vx: x está vivo. Px: x es un perro. Pxy: x es más peligroso que y.)
4. Difícilmente miente una cabeza que porta corona. (Mx: x miente difícilmente. Cx: x es una cabeza. Dx: x es una corona. Pxy: x porta y.)
*5. Cada rosa tiene su espina. (Rx: x es una rosa. Tx: x es una espina. Hxy: x tiene y.)
6. Cualquiera que consulte a un siquiatra debiera hacerse examinar de la cabeza. (Px: x es una persona. Sx: x es un siquiatra. Dx: x debiera hacerse examinar de la cabeza. Cxy: x consulta a y.)
7. Nadie aprende nada si no se lo enseña a sí mismo. (Px: x es una persona. Axy: x aprende y. $Exyz$: x le enseña y a z.)
8. Dalila llevaba un anillo en cada dedo, y tenía un dedo dentro de cada pastel. (d: Dalila. Ax: x es un anillo. Dxy: x es un dedo de y. Exy: x está en y. Px: x es un pastel. Ixy: x está dentro de y.)
9. Cualquier hombre que odia a los niños y a los perros no puede ser completamente malo. (Hx: x es un hombre. Nx: x es un niño. Px: x es un perro. Mx: x es completamente malo. Oxy: x odia a y.)
*10. Cualquiera que logre algo será la envidia de todos. (Px: x es una persona. Axy: x logra y. Exy: x envidia a y.)
11. Para pescar algún pez hay que tener alguna carnada. (Px: x es una persona. Fx: x es un pez. Cx: x es una carnada. Pxy: x pesca y. Txy: x tiene y.)
12. Todo estudiante hace algunos problemas pero ningún estudiante hace todos los problemas. (Ex: x es un estudiante. Px: x es un problema. Hxy: x hace y.)
13. Todo concursante que conteste todas las preguntas que se le hagan ganará cualquier premio que elija. (Cx: x es un concursante. Qx: x es una pregunta. Px: x es un premio. Cxy: x contesta y. Hxy: x se le hace a y. Gxy: x gana y. Exy: x elige y.)
14. Todo hijo tiene un padre, pero no todo padre tiene un hijo. (Px: x es una persona. Hx: x es un hombre. Pxy: x es padre de y.)
*15. Una persona mantiene un estorbo si tiene un perro que le ladra a cualquiera que visite a su dueño. (Px: x es una persona. Nx: x es un estorbo. Mxy: x mantiene y. Dx: x es un perro. Bxy: x ladra a y. Vxy: x visita y. Hxy: x tiene y.)
16. Un doctor que trata un paciente sin enfermedad no tiene escrúpulos. (Dx: x es un doctor. Ex: x es un escrúpulo. Hxy: x tiene y. Px: x es un paciente. Fx: x es una enfermedad. Txy: x trata a y.)
17. Un doctor que trata a una persona que tiene todas las enfermedades tiene un trabajo que nadie le envidiaría. (Dx: x es un doctor. Px: x es una persona. Txy: x trata a y. Ex: x es una enfermedad. Hxy: x tiene y. Tx: x es un trabajo. $Exyz$: x le envidia a y su z.)
18. Si un granjero sólo cría gallinas ninguna de ellas pondrá huevos que valga la pena incubar. (Gx: x es un granjero. Cxy: x cría y. Ax: x es una gallina. Hx: x es un huevo Pxy: x pone y. Vx: vale la pena incubar x.)

Al simbolizar las siguientes, usar solamente las abreviaciones: Px: x es una persona. Tx: x es una tienda. $Cxyz$: x compra y en z.

19. Todos compran algo en una (u otra) tienda.
*20. Hay una tienda en la que cada cual compra una (u otra) cosa.
21. Algunas personas hacen todas sus compras en una sola tienda.
22. Nadie compra todas sus cosas en una sola tienda.
23. Nadie compra cosas en todas las tiendas.
24. Ninguna tienda tiene a todos como clientes.
*25. Ninguna tienda hace todas sus ventas a una sola persona.

Al simbolizar las siguientes, usar solamente las abreviaciones: Bx: x es una beneficencia; Dx: x es dinero; Px: x es una persona; Pxy: x pertenece a y; $Dxyz$: x hace la donación de y a z.

26. Nadie hace donaciones a todas las beneficencias.
27. Nadie dona dinero a todas las beneficencias.
28. Nadie hace donación de todo su dinero a beneficencias.
29. Nadie hace donación de todo su dinero a una sola beneficencia.
*30. Nadie hace donación de todas sus pertenencias a una sola beneficencia.

(En este ejercicio, el número 35 y el 40, usar las abreviaciones Cx, Mx, Px, Bxy y $Dxyz$ para confrontar las respuestas al final del libro).

31. Nadie hace todas sus donaciones a una sola beneficencia.
32. Ninguna beneficencia recibe todo su dinero de una sola persona.
33. Ninguna beneficencia recibe todo el dinero de una sola persona.
34. Ninguna beneficiencia recibe todas las donaciones de una sola persona.
*35. Ninguna beneficencia recibe todas las donaciones de un solo donante.
36. Ninguna beneficencia recibe solamente donaciones en dinero.
37. Alguien da dinero a las beneficencias.
38. Alguien da todo su dinero a las beneficencias.
39. Cuando menos una persona hace donación de todas sus pertenencias a una sola beneficencia.
*40. Cuando menos una persona hace todas sus donaciones a una sola beneficencia.
41. Algunas beneficencias reciben donaciones de todas las personas.
42. Algunas beneficencias reciben donaciones de cada donante.
43. Algunas donaciones no son hechas a beneficencias.
44. Algunos donantes hacen donaciones a todas las beneficencias.
45. Cada beneficencia recibe donaciones de cuando menos un donante.

III. Simbolizar cada una de las siguientes:

*1. El que derramare sangre de hombre, por el hombre su sangre será derramada. (Génesis 9:6)
2. Su mano será contra todos y la mano de todos contra él. (Génesis 16:12)
3. El Sol no te fatigará de día ni la Luna de noche. (Salmo 121:6)
4. El hijo sabio alegra al padre. (Proverbios 10:1)
*5. El que detiene el castigo a su hijo, lo aborrece. (Proverbios 13:24)
6. El que toma prestado es siervo del que presta (Proverbios 22:7)
7. El que cava foso caerá en él, y al que revuelve la piedra, sobre él le volverá. (Proverbios 26:27)

8. Los padres comieron las uvas agrias y los dientes de los hijos tienen la dentera. (Ezequiel 18:2)
9. Los zorros tienen guaridas y las aves del cielo nidos; mas el Hijo del Hombre no tuvo donde recostar su cabeza. (Mateo 8:20)
10. . . .no hago el bien que quiero, sino el mal que no quiero, eso hago. (Romanos 7:19)

5.2. Argumentos que Involucran Relaciones

No hay necesidad de introducir nuevos principios para tratar los argumentos relacionales. La lista original de diecinueve Reglas de Inferencia junto con el método reforzado de Demostración Condicional y nuestras reglas de cuantificación, además de la Negación de Cuantificador nos permiten (teniendo el ingenio suficiente) construir una demostración formal de validez para cada argumento válido en el que solamente variables individuales son cuantificadas y sólo se presentan conectivos de función de verdad.

Sin embargo, es aconsejable hacer un cierto cambio en la técnica al trabajar con argumentos que involucran relaciones. En la mayor parte de nuestras demostraciones ilustrativas anteriores se usaban **UI** y **EI** para instanciar con respecto a una variable diferente de cualquiera de las cuantificadas en la premisa, y **UG** y **EG** se usaban para cuantificar con respecto a una variable diferente de las que ocurriesen libremente en la premisa. Nuestras inferencias eran en su mayor parte de las formas:

$$\frac{(x)Fx}{\therefore Fy}, \quad \begin{array}{l} (\exists x)Fx \\ \rightarrow Fy \\ \quad \vdots \\ \quad p \\ \hline \therefore p \end{array}, \quad \frac{Fx}{\therefore (y)Fy}, \quad \frac{Fy}{\therefore (\exists w)Fw}$$

Pero nuestra enunciación de las reglas de cuantificación no requiere que μ y ν sean variables diferentes; bien pueden ser la misma. Y globalmente es más simple (siempre que sea legítimo) instanciar con respecto a la misma variable que ha sido cuantificada y cuantificar con respecto a la misma variable que ocurriese libre en la premisa. Así, las inferencias anteriores pueden también tomar alguna de las formas siguientes:

$$\frac{(x)Fx}{\therefore Fx}, \quad \begin{array}{l} (\exists x)Fx \\ \rightarrow Fx \\ \quad \vdots \\ \quad p \\ \hline \therefore p \end{array}, \quad \frac{Fx}{\therefore (x)Fx}, \quad \frac{Fy}{\therefore (\exists y)Fy}$$

En esta forma se lleva a cabo la instanciación por simple retiro de un cuantificador y la generalización se lleva a cabo simplemente agregando un cuantificador. Desde luego que nuestras restricciones sobre las reglas de cuantificación deberán seguir vigentes y observadas. Por ejemplo, en donde se tengan dos premisas "$(\exists x)Fx$" y "$(\exists x) \sim Fx$", podemos instanciar con respecto a una simplemente quitando el cuantificador, pero cuando se haya hecho eso, si **EI** se usa más adelante en el otro, se debe utilizar una nueva variable en lugar de "x", pues esta última habrá tenido ya una ocurrencia libre en la demostración que se construye. Desde luego, estamos en perfecta libertad de usar **UI** para instanciar con respecto a cualquier variable o constante que elijamos. Las observaciones precedentes se pueden ilustrar construyendo una demostración de validez para el argumento.

> Existe un hombre que todos desprecian.
>
> ---
>
> Por lo tanto, existe al menos un hombre que se desprecia a sí mismo.

Su traducción simbólica y demostración usando "Mx" y "Dxy" para abreviar "x es un hombre" y "x desprecia a y" se puede escribir como sigue:

1.	$(\exists x)[Mx \cdot (y)(My \supset Dyx)]$	$/ \therefore (\exists x)(Mx \cdot Dxx)$
→ 2.	$Mx \cdot (y)(My \supset Dyx)$	
3.	$(y)(My \supset Dyx)$	2, Simp.
4.	$Mx \supset Dxx$	3, **UI**
5.	Mx	2, Simp.
6.	Dxx	4, 5, M.P.
7.	$Mx \cdot Dxx$	5, 6, Conj.
8.	$(\exists x)(Mx \cdot Dxx)$	7, **EG**
9.	$(\exists x)(Mx \cdot Dxx)$	1, 2–8, **EI**

En la demostración precedente la única utilización de una regla de cuantificación acompañada por un cambio de variable fue la de **UI** al pasar del renglón 3 al renglón 4 que se efectúa porque necesitábamos la expresión "Dxx" así obtenida.

Otra demostración formal sirve para establecer la validez del tercer modelo de argumento enunciado al principio de este capítulo. Su premisa "todos los caballos son animales" se simbolizará "$(x)(Ex \supset Ax)$" donde "Ex" y "Ax" abrevian "x es un caballo" y "x es un animal", respectivamente. En su conclusión

> La cabeza de un caballo es la cabeza de un animal.

la palabra "la" tiene el mismo sentido que tiene en la proposición "La ballena es un mamífero" o "El niño quemado teme al fuego". Podemos parafrasearla como

Todas las cabezas de caballos son cabezas de animales.

y después como

$(x)[(x$ es una cabeza de un caballo$)$
$\supset (x$ es una cabeza de un animal$)]$

y finalmente escribiendo "Hxy" en lugar de "x es una cabeza de y" podemos expresar la conclusión mediante la fórmula

$$(x)[(\exists y)(Ey \cdot Hxy) \supset (\exists y)(Ay \cdot Hxy)]$$

Una vez simbolizada, el argumento fácilmente se demuestra válido por las técnicas de que ya disponemos:

1.	$(x)(Ex \supset Ax)$ $\quad /\therefore (x)[(\exists y)(Ey \cdot Hxy) \supset (\exists y)(Ay \cdot Hxy)]$	
→ 2.	$(\exists y)(Ey \cdot Hxy)$	
→ 3.	$Ey \cdot Hxy$	
4.	Ey	3, Simp.
5.	$Ey \supset Ay$	1, **UI**
6.	Ay	5, 4, M.P.
7.	Hxy	3, Simp.
8.	$Ay \cdot Hxy$	6, 7, Conj.
9.	$(\exists y)(Ay \cdot Hxy)$	8, **EG**
10.	$(\exists y)(Ay \cdot Hxy)$	2, 3–9, **EI**
11.	$(\exists y)(Ey \cdot Hxy) \supset (\exists y)(Ay \cdot Hxy)$	2–10, C.P.
12.	$(x)[(\exists y)(Ey \cdot Hxy) \supset (\exists y)(Ay \cdot Hxy)]$	11, **UG**

El primer modelo de argumentos en este capítulo que trataba con la relación *de ser mayor de edad que* plantea un nuevo problema que se discutirá en la sección siguiente.

EJERCICIOS

I. Construir una demostración formal de validez para cada uno de los argumentos siguientes:

*1. $(\exists x)(y)[(\exists z)Ayz \supset Ayx]$
$(y)(\exists z)Ayz$
$\therefore (\exists x)(y)Ayx$

2. $(x)[(\exists y)Byx \supset (z)Bxz]$
$\therefore (y)(z)(Byz \supset Bzy)$

3. $(x)(Cax \supset Dxb)$
   $(\exists x)Dxb \supset (\exists y)Dby$
   $\therefore (\exists x)Cax \supset (\exists y)Dby$
4. $(x)[Ex \supset (y)(Fy \supset Gxy)]$
   $(\exists x)[Ex \cdot (\exists y) \sim Gxy]$
   $\therefore (\exists x) \sim Fx$

*5. $(\exists x)[Hx \cdot (y)(Iy \supset Jxy)]$
   $\therefore (x)(Hx \supset Ix) \supset (\exists y)(Iy \cdot Jyy)$
6. $(x)\{Kx \supset [(\exists y)Lxy \supset (\exists z)Lzx]\}$
   $(x)[(\exists z)Lzx \supset Lxx]$
   $\sim(\exists x)Lxx$
   $\therefore (x)(Kx \supset (y) \sim Lxy)$
7. $(x)[Mx \supset (y)(Ny \supset Oxy)]$
   $(x)[Px \supset (y)(Oxy \supset Qy)]$
   $\therefore (\exists x)(Mx \cdot Px) \supset (y)(Ny \supset Qy)$
8. $(x)[(Rx \cdot \sim Sx) \supset (\exists y)(Txy \cdot Uy)]$
   $(\exists x)[Vx \cdot Rx \cdot (y)(Txy \supset Vy)]$
   $(x)(Vx \supset \sim Sx)$
   $\therefore (\exists x)(Vx \cdot Ux)$
9. $(x)(Wx \supset Xx)$
   $(x)[(Yx \cdot Xx) \supset Zx]$
   $(x)(\exists y)(Yy \cdot Ayx)$
   $(x)(y)[(Ayx \cdot Zy) \supset Zx]$
   $\therefore (x)[(y)(Ayx \supset Wy) \supset Zx]$
10. $(x)\{[Bx \cdot (\exists y)[Cy \cdot Dyx \cdot (\exists z)(Ez \cdot Fxz)]] \supset (\exists w)Gxwx\}$
   $(x)(y)(Hxy \supset Dyx)$
   $(x)(y)(Fxy \supset Fyx)$
   $(x)(Ix \supset Ex)$
   $\therefore (x)\{Bx \supset [[(\exists y)(Cy \cdot Hxy) \cdot (\exists z)(Iz \cdot Fxz)] \supset (\exists u)(\exists w)\,Gxwu]\}$

II. Construir una demostración formal de validez para cada uno de los siguientes argumentos:

1. Quienquiera que apoye a Smith votará por Jones. Anderson no votará por nadie que no sea un amigo de Harris. Ningún amigo de Kelly tiene como amigo a Jones. Por lo tanto, si Harris es un amigo de Kelly, Anderson no apoyará a Smith. (Axy: x apoya a y. Vxy: x vota por y. Fxy: x es amigo de y. a: Anderson. s: Smith. j: Jones. h: Harris. k: Kelly.)
2. Todos los círculos son figuras. Por lo tanto, todos los que trazan círculos trazan figuras. (Cx: x es un círculo. Fx: x es una figura. Txy: x traza y.)
3. Cualquier amigo de Juan es un amigo de Pedro. Por lo tanto, cualquiera que conozca a un amigo de Juan conoce a un amigo de Pedro. (Px: x es una persona. Axy: x es un amigo de y. Cxy: x conoce a y. j: Juan. p: Pedro.)

*4. Solamente un tonto mentiría respecto a uno de los miembros de la fraternidad de Bill, a Bill. Un compañero de clase de Bill le mintió respecto a Alberto. Por lo tanto, si ninguno de los compañeros de clase de Bill es un tonto, entonces Alberto no es un miembro de la fraternidad de Bill. (*Fx*: *x* es un tonto. *Lxyz*: *x* miente a *z* respecto a *y*. *Cxy*: *x* es compañero de clase de *y*. *Bxy*: *x* es miembro de la fraternidad de *y*. *a*: Alberto. *b*: *Bill.*)

5. Quienquiera que pertenezca al Country Club tiene más dinero que cualquier miembro del Club de la Taberna. No cualquiera que pertenezca al Country Club tiene más dinero que cualquiera que no pertenezca al mismo. Por lo tanto, no cualquiera pertenece al Country Club o al Club de la Taberna. *Cx*: *x* pertenece al Country Club. *Tx*: *x* pertenece al Club de la Taberna. *Px*: *x* es una persona. *Dxy*: *x* tiene más dinero que *y*.)

*6. Vender una arma no registrada es un crimen. Todas las armas que Rojo posee se las compró o al Zurdo o al Tuerto. De modo que si una de las armas de Rojo es una pistola no registrada, y si Rojo nunca le compró nada al Tuerto, el Zurdo es un criminal. (*Rx*: *x* está registrada. *Gx*: *x* es una pistola. *Cx*: *x* es un criminal. *Wx*: *x* es una arma. *Oxy*: *x* posee *y*. *Sxyz*: *x* vendió *y* a *z*. *r*: Rojo *l*: el Zurdo. *m*: el Tuerto.)

7. Todo lo que hay en mi escritorio es una obra maestra. Quienquiera que escriba una obra maestra es un genio. Alguna persona desconocida escribió algunas de las novelas que hay en mi escritorio. Por lo tanto, alguna persona desconocida es un genio. (*Ex*: *x* está en mi escritorio. *Mx*: *x* es una obra maestra. *Px*: *x* es una persona. *Gx*: *x* es un genio. *Dx*: *x* es desconocido. *Nx*: *x* es una novela. *Exy*: *x* escribió *y*.)

8. Hay un profesor que agrada a todos los estudiantes a quienes agrada cuando menos un profesor. A todo estudiante le agrada uno u otro profesor. Por lo tanto, hay un profesor que agrada a todos los estudiantes. (*Px*: *x* es un profesor. *Ex*: *x* es un estudiante. *Axy*: a *x* le agrada *y*.)

9. Nadie respeta a una persona que no se respeta a sí misma. Nadie contratará a una persona que no se respeta. Por lo tanto, una persona que no respeta a nadie nunca será contratada por nadie. (*Px*: *x* es una persona. *Rxy*: *x* respeta a *y*. *Cxy*: *x* contrata a *y*.)

10. Quienquiera que haga una donación al United Fund hace todas sus donaciones al United Fund. Por tanto, si Jones es una persona que no hace todas sus donaciones al United Fund, entonces no hace donación alguna al United Fund. (*Px*: *x* es una persona. *Dxyz*: *x* hace donación de *y* a *z*. *f*: El United Fund. *j*: *Jones*.)

11. Todo libro que sea aprobado por todos los críticos será leído por cualquier persona literata. Cualquiera que lea cualquier cosa hablará de ella. Un crítico aprobará cualquier libro escrito por cualquier persona que le adule. Así pues, si alguien adula a todos los críticos, entonces cualquier libro que escriba será comentado por todas las personas literatas. (*Lx*: *x* es un libro. *Cx*: *x* es un crítico. *Tx*: *x* es un literato. *Px*: *x* es una persona. *Axy*: *x* aprueba *y*. *Lxy*: *x* lee *y*. *Cxy*: *x* comenta *y*. *Fxy*: *x* adula a *y*. *Exy*: *x* escribe *y*.)

12. Una obra de arte que relata algo puede ser comprendida por todos. Algunas obras de arte religioso han sido creadas por grandes artistas. Cualquier obra de arte religioso relata una historia que inspira. Por

lo tanto, si algunas personas sólo admiran lo que no pueden entender, entonces algunas creaciones de grandes artistas no serán admiradas por todos. (Ax: x es un gran artista. Px: x es una persona. Hx: x es una historia. Ix: x inspira. Rx: x es religioso. Ox: x es una obra de arte. Cxy: x crea y. Axy: x admira a y. Rxy: x relata y. Exy: x puede entender y.)

5.3. Algunos Atributos de las Relaciones

Hay muchos atributos interesantes que las relaciones mismas pueden tener. Vamos a considerar tan sólo algunos de los más familiares y nuestra discusión quedará limitada a los atributos de las relaciones *diádicas*.

Las relaciones diádicas se pueden caracterizar como *simétricas, asimétricas*, o *no simétricas*. Varias relaciones simétricas están designadas por las frases: "es vecino de", "está casado con" y "tiene el mismo peso que". Una relación *simétrica* es una relación tal que, si una cosa está en esa relación con una segunda, entonces la segunda *debe* estar en esa relación con la primera. Una función proposicional "Rxy" designa una relación simétrica si y sólo si

$$(x)(y)(Rxy \supset Ryx)$$

Por el otro lado, una relación *asimétrica* es una relación tal que, si una cosa está en esa relación con una segunda cosa, entonces la segunda *no puede* estar en esa relación con la primera. Las siguientes frases designan varias relaciones asimétricas: "está al norte de", "es mayor que" y "pesa más que". Una función proposicional "Rxy" designa una relación asimétrica si y sólo si

$$(x)(y)(Rxy \supset \sim Ryx)$$

Sin embargo, no todas las relaciones son simétricas o asimétricas. Si *una persona* ama a otra o es hermano de otra o pesa no más que otra, no se infiere que la segunda ame a la primera o sea su hermano (podría ser su hermana) o que pesa no más que la primera. Ni tampoco se sigue que la segunda *no* ama a la primera o que *no* es su hermano, o que *no* pesa más que la primera. Relaciones como éstas son *no simétricas* y se les define como las que no son ni simétricas ni asimétricas.

Las relaciones diádicas también se pueden caracterizar como *transitivas, intransitivas* o *no transitivas*. Las siguientes frases designan relaciones transitivas: "está al norte de", "es un antepasado de" y "pesa lo mismo que". Una relación *transitiva* es una relación tal que, si una cosa está en esa relación con una segunda y la segunda con una tercera, entonces la primera debe estar en esa relación con la tercera. Una función proposicional "*Rxy*" designa una relación transitiva si y sólo si

$$(x)(y)(z)[(Rxy \cdot Ryz) \supset Rxz]$$

Una relación *intransitiva* por el otro lado, es una relación tal que si una cosa está en esa relación con una segunda, y la segunda con una tercera, entonces la primera *no puede* estarlo con la tercera; las frases siguientes corresponden a relaciones intransitivas: "es madre de", "es padre de" y "pesa exactamente el doble que". Una función proporcional "*Rxy*" designa una relación intransitiva si y sólo si

$$(x)(y)(z)[(Rxy \cdot Ryz) \supset \sim Rxz]$$

No todas las relaciones son transitivas o intransitivas. Definimos una relación *no transitiva* como aquella que no es transitiva ni intransitiva; las siguientes frases designan relaciones no transitivas: "ama a", "se puede diferenciar de" y "tiene un peso diferente del de".

Finalmente, las relaciones pueden ser *reflexivas, irreflexivas* o *no reflexivas*. Varios autores han propuesto varias definiciones de estas propiedades y parece no haber una terminología estándar bien establecida. Es conveniente distinguir entre la reflexividad y la reflexividad total. Una relación es *totalmente reflexiva* si cada cosa está en esa relación consigo misma. Por ejemplo, la frase "es idéntico a" designa la relación totalmente reflexiva de identidad. Una función proposicional "*Rxy*" designa una relación totalmente reflexiva si y sólo si

$$(x)Rxx$$

Por otro lado, una relación se dice *reflexiva* si cualquier cosa *a* está en esa relación consigo misma si existe una cosa *b* tal que *Rab* o *Rba*. Ejemplos obvios de relaciones reflexivas los designan las frases: "tiene el mismo color de cabello que", "tiene la misma edad que" y "es un contemporáneo de". Una función proposicional "*Rxy*" designa una relación reflexiva si y sólo si

$$(x)[(\exists y)(Rxy \vee Ryx) \supset Rxx]$$

Es obvio que todas las relaciones totalmente reflexivas son reflexivas.

Una relación *irreflexiva* es tal que nada está en esa relación consigo mismo. Una función proposicional "*Rxy*" designa una relación irreflexiva si y sólo si

$$(x) \sim Rxx$$

Los ejemplos de relaciones irreflexivas son comunes; las frases "está al norte de", "está casado con" y "es padre de", designan todas relaciones irreflexivas. Las relaciones que no son ni reflexivas ni irreflexivas se dice que son *no reflexivas*. Las frases "ama a", "odia a" e "y critica a" designan relaciones no reflexivas.

Las relaciones pueden tener varias combinaciones de estos atributos. La relación de *pesar más que* es asimétrica, transitiva e irreflexiva, mientras que la relación de *tener el mismo peso que* es simétrica, transitiva y reflexiva. Sin embargo, algunos atributos implican la presencia de otros. Por ejemplo, todas las relaciones asimétricas deben ser irreflexivas como es fácil de mostrar. Sea "Rxy" la designación de alguna relación asimétrica; entonces, por definición

1. $(x)(y)(Rxy \supset \sim Ryx)$

De esta premisa es posible deducir que R es irreflexiva, es decir, que $(x) \sim Rxx$:

2.	$(y)(Rxy \supset \sim Ryx)$	1, UI
3.	$Rxx \supset \sim Rxx$	2, UI
4.	$\sim Rxx \vee \sim Rxx$	3, Impl.
5.	$\sim Rxx$	4, Taut.
6.	$(x) \sim Rxx$	5, UG

Otras conexiones lógicas entre estos atributos de relaciones fácilmente se enuncian y demuestran, pero nuestro interés tiene otra dirección.

La importancia o pertinencia de estos atributos con respecto a los argumentos relacionales es fácil de ver. Un argumento con respecto al cual uno es pertinente podría enunciarse como:

Tomás pesa lo mismo que Ricardo.
Ricardo pesa lo mismo que Enrique.
La relación de *pesar lo mismo que* es transitiva.
___
Por lo tanto, Tomás pesa lo mismo que Enrique.

Cuando se le traduce a nuestro simbolismo como

$$\begin{array}{l} Wtd \\ Wdh \\ \underline{(x)(y)(z)[(Wxy \cdot Wyz) \supset Wxz]} \\ \therefore Wth \end{array}$$

el método de demostración de su validez es obvio, de inmediato. Hemos dicho que el argumento "podría" enunciarse de la manera indicada. Pero esta manera de enunciar el argumento sería más la excepción que la regla. La manera ordinaria de proponer un argumento tal sería enunciar las dos primeras premisas y la conclusión solamente fundándose en que *cualquiera sabe* que *pesar lo mismo que* es una relación transitiva. Los argumentos relacionales a menudo se usan y muchos de ellos dependen esencialmente de la transitividad o la simetría o alguno de los otros atributos de las relaciones que se involucran. Pero *que* la relación en cuestión *tenga* el atributo pertinente rara vez, si acaso alguna vez, se enuncia explícitamente como una premisa. La razón es clara. En casi todas las discusiones se puede presuponer un gran número de proposiciones que se suponen del conocimiento general. La mayoría de los oradores y escritores se evitan molestias no repitiendo proposiciones bien conocidas y a veces tan triviales como verdaderas que de sus oyentes o lectores puede perfectamente bien esperarse que las proveerán por sí mismos. Un argumento que está expresado de manera incompleta, siendo "sobreentendida" una parte del mismo, es un *entimema*.

Al ser incompleto, es necesario tener en cuenta las premisas suprimidas de un entimema cuando surge la cuestión de su validez. En donde falte una premisa necesaria la inferencia es técnicamente inválida. Pero si la premisa no expresada es fácil de proveer y obviamente verdadera con toda justicia debiera incluírsele como parte del argumento al tratarse su apreciación. En tal caso se supone que el que hace el argumento tenía más "en mente" de lo explícitamente enunciado. En la mayoría de los casos no hay dificultad en proveer la premisa tácita que el orador tenía en mente, pero no expresó. Así, el primer modelo de argumento enunciado al principio de este capítulo:

Alberto es mayor que Guillermo.
Guillermo es mayor que Carlos.

Por lo tanto, Alberto es mayor que Carlos.

debiera contarse como válido, pues se convierte en válido cuando la proposición trivialmente verdadera, *ser mayor que*, relación transitiva se agrega como una premisa auxiliar. Cuando la premisa faltante indicada es provista, es muy fácil escribir una demostración de validez del argumento.

Desde luego, es frecuente dejar inexpresadas premisas que no sean relacionales. Por ejemplo, en el argumento

Cualquier caballo es más veloz que cualquier perro. Algunos galgos son más veloces que cualquier liebre. Por lo tanto, cualquier caballo es más veloz que cualquier liebre.

no sólo falta expresar la premisa requerida respecto a la transitividad de *ser más veloz que* sino que también la premisa no relacional que todos los galgos son perros. Cuando se agregan éstas, que ciertamente no son cuestiones debatibles, la validez del argumento se puede demostrar como sigue:

1.	$(x)[Hx \supset (y)(Dy \supset Oxy)]$	premisas
2.	$(\exists y)[Gy \cdot (z)(Rz \supset Oyz)]$	$/\therefore (x)[Hx \supset (z)(Rz \supset Oxz)]$
3.	$(x)(y)(z)[(Oxy \cdot Oyz) \supset Oxz]$	premisas adicionales
4.	$(y)(Gy \supset Dy)$	
5.	Hx	
6.	Rz	
7.	$Gy \cdot (z)(Rz \supset Oyz)$	
8.	Gy	7, Simp.
9.	$Gy \supset Dy$	4, **UI**
10.	Dy	9, 8, M.P.
11.	$Hx \supset (y)(Dy \supset Oxy)$	1, **UI**
12.	$(y)(Dy \supset Oxy)$	11, 5, M.P.
13.	$Dy \supset Oxy$	12, **UI**
14.	Oxy	13, 10, M.P.
15.	$(z)(Rz \supset Oyz)$	7, Simp.
16.	$Rz \supset Oyz$	15, **UI**
17.	Oyz	16, 6, M.P.
18.	$Oxy \cdot Oyz$	14, 17, Conj.
19.	$(y)(z)[(Oxy \cdot Oyz) \supset Oxz]$	3, **UI**
20.	$(z)[(Oxy \cdot Oyz) \supset Oxz]$	19, **UI**
21.	$(Oxy \cdot Oyz) \supset Oxz$	20, **UI**
22.	Oxz	21, 18, M.P.
23.	Oxz	2, 7–22, **EI**
24.	$Rz \supset Oxz$	6–23, C.P.
25.	$(z)(Rz \supset Oxz)$	24, **UG**
26.	$Hx \supset (z)(Rz \supset Oxz)$	5–25, C.P.
27.	$(x)[Hx \supset (z)(Rz \supset Oxz)]$	26, **UG**

No siempre es tan fácil como en este ejemplo encontrar las premisas faltantes y suplirlas. Cuando no sea obvio cuáles son las premisas requeridas faltantes en un argumento entimemáticamente expresado, entonces, al comenzar una demostración de su validez es sana política el dejar algún espacio por debajo de las premisas dadas en donde puedan escribirse las premisas adicionales cuando surja la necesidad de ellas. El único punto que hay que recalcar es que ningún enunciado que sea tan dudoso o debatible como la conclusión misma del argumento debiera admitirse como premisa suplementaria, pues en un argumento válido enunciado entimemáticamente, sólo las simplezas más absolutas debieran quedar inexpresadas, para que el lector o el oyente las supliese por sí mismo.

EJERCICIOS

Demostrar la validez de los siguientes entimemas agregando las premisas obviamente verdaderas en donde sea necesario:

1. Un Cadillac es más caro que un automóvil barato. Por lo tanto, ningún Cadillac es un automóvil barato. (Cx: x es un Cadillac. Bx: x es un automóvil barato. Mxy: x es más caro que y.)
2. Alicia es la madre de Beatriz. Beatriz es madre de Carlota. Por lo tanto, si Carlota sólo ama a su madre entonces no ama a Alicia. (a: Alicia. b: Beatriz. c: Carlota. Mxy: x es madre de y. Axy: x ama a y.)

*3. Todo hombre del primer equipo es más rápido que cualquiera del segundo equipo. Por lo tanto, ningún hombre del segundo equipo es más rápido que alguno del primer equipo. (Fx: x está en el primer equipo. Sx: x es un hombre que está en el segundo equipo. Oxy: x es más rápido que y.)

4. Todos los muchachos que asistieron a la fiesta bailaron con todas las chicas presentes. Por lo tanto, cada chica que asistió a la fiesta bailó con todos los mucbachos que ahí estaban. (Mx: x es un muchacho. Cx: x es una chica. Fx: x estaba en la fiesta. Bxy: x bailó con y.)

*5. Cualquier persona que lleve el mismo apellido de alguien que comete un crimen es desafortunada. Por lo tanto, cualquiera que comete un robo es desafortunado. (Px: x es una persona. Ux: x es desafortunado. Cx: x es un crimen. Bx: x es un robo. Cxy: x comete y. Nxy: x tiene el mismo nombre de y.)

6. Todos los relojes que vende Kubitz son hechos en Suiza. Todo lo que se ha hecho en un país extranjero paga impuesto. Cualquier cosa por la que se paga un impuesto le cuesta al comprador una cantidad extra. Por lo tanto, los relojes que se le compran a Kubitz tienen un costo extra. (Rx: x es un reloj. Ix: x se paga un impuesto por x. Ex: x es un país extranjero. Cxy: x le cuesta a y una cantidad extra. Hxy: x es hecho en y. $Bxyx$: x compra y a z. s: Suiza. k: *Kubitz*.)
7. Los lotes baldíos no producen ingresos a sus propietarios. Cualquier propietario de bienes raíces debe pagar impuesto sobre los mismos. Por lo tanto, cualquier propietario de un lote baldío debe pagar impuesto por algo que no le produce ingresos. (Vx: x es un lote baldío. Rx: x son bienes raíces. Ixy: x produce ingresos a y. Txy: x paga impuesto por y. Oxy: x tiene la propiedad y.)
8. Todos los almirantes llevan uniforme con botones dorados. Por tanto, algunos oficiales navales llevan uniformes con botones dorados. (Ax: x es un almirante. Ux: x es un uniforme. Dx: x es dorado. Bx: x es un botón. Nx: x es un oficial naval. Rx: x es ropa. Mx: x es metal. Wxy: x lleva la ropa y. Txy: x tiene y.)
9. Si alguna vez Carlos se mudó a Boston, eso ocurrió después de conocer a Alberto. Si alguna vez Carlos se casó eso fue antes de haber visto a David. Por lo tanto, si Carlos se mudó a Boston y después se casó, entonces conoció a Alberto antes de haber visto a David. (Tx: x es un tiempo. Ax: x Carlos conoció a Alberto en el tiempo x. Bx: x Carlos se mudó a Boston en el tiempo x. Cx: x Carlos se casó en el tiempo x. Dx: x Carlos vio a David en el tiempo x. Pxy: x precede a y.)
10. Un pez que persigue a todas las carpas plateadas será atrapado por un pescador que utiliza carpas plateadas como carnada. Un pez voraz perse-

guirá cualquier carpa plateada. De modo que si todos los pescadores son deportistas, entonces ningún lucio que no es atrapado por un deportista que utiliza carpas plateadas como carnada es voraz. (Px: x es un pez. Cx: x es una carpa plateada. Pxy: x persigue a y. Cxy: x captura a y. Ax: x es un pescador. Uxy: x utiliza y como carnada. Vx: x es voraz. Dx: x es una carpa plateada diminuta. Sx: x es un deportista. Lx: x es un lucio.)

5.4. Identidad y la Descripción Definida

La noción de *identidad* es una noción familiar. La ocasión más natural de su uso es tal vez en el proceso de *identificación* como cuando un testigo en la delegación de policía identifica un sospechoso de la fila, afirmando que

El hombre de la derecha *es* el hombre que me robó el bolso.

Otras identificaciones son también comunes como cuando en la clase de geografía se afirma que

El Monte Everest *es* la montaña más alta del mundo.

o cuando en la clase de literatura se afirma que

Lope de Vega *es* el autor de *Fuente Ovejuna.*

Cada una de estas proposiciones afirma que se da una relación entre las cosas a las que se refieren sus dos términos. La relación afirmada es la de *identidad.* En cada una de las proposiciones precedentes cuando menos un término era una *descripción definida,* que es una frase de la forma "el tal y cual". En las identificaciones, sin embargo, los dos términos pueden ser nombres propios. Así como en las dos proposiciones

Bruto mató a César.

y

Booth mató a Lincoln.

se afirma que la relación de *matar* existe entre los individuos a los que se refiere por los nombres propios que en ellas aparecen, así también en las proposiciones

Lewis Carroll era Charles Lutwidge Dodgson.

y

Mark Twain era Samuel Clemens.

se afirma la relación de *identidad* entre los individuos a los que se refiere con los nombres propios que en ellas aparecen.

La notación usual para la relación de identidad es el signo ordinario de igual "=". Es obvio que la relación de identidad es transitiva, simétrica y totalmente reflexiva. En nuestra notación simbólica escribimos

$$(x)(y)(z)\{[(x = y)\cdot(y = z)] \supset (x = z)\}$$
$$(x)(y)[(x = y) \supset (y = x)]$$
$$(x)(x = x)$$

Todas estas son consecuencias inmediatas de la definición de identidad contenida en el principio de la Identidad de los Indiscernibles, de Leibniz:

$x = y$ si y sólo si cada atributo de x es un atributo de y y recíprocamente.

Este principio nos permite inferir de las premisas $\nu = \mu$ y cualquier proposición que contenga una ocurrencia del símbolo ν, como conclusión cualquier proposición que resulte de reemplazar cualesquier ocurrencias de ν en la segunda premisa por el símbolo μ.[1] Toda inferencia que se apega a este modelo es válida y en una demostración debiera escribirse a un lado de ella "Id". Una o dos deducciones de muestra aclararán este punto. El argumento

O. Henry era William Sidney Porter.
O. Henry era un escritor.

Por lo tanto, William Sidney Porter era un escritor.

se puede simbolizar y demostrar su validez mediante el siguiente argumento en el que se usan las letras "h" y "p" para abreviar los nombres propios "O. Henry" y "William Sidney Porter" y el símbolo "Wx" para "x era un escritor":

1. $h = p$
2. $Wh \quad /\therefore Wp$
3. $Wp \qquad$ 1, 2, Id.

Otra ilustración la tenemos en el argumento:

George Eliot escribió *The Mill on the Floss* (El Molino del Floss).
George Eliot es Mary Ann Evans.
Mary Ann Evans es una mujer.

Por lo tanto, una mujer escribió *The Mill on the Floss.*

Usando los símbolos "g", "f", "Mx", "Wxy", "Wx" para abreviar "George Eliot", "*The Mill on the Floss*", "Mary Ann Evans", "x escribió y" y "x es una mujer", podemos formular y demostrar la validez del argumento dado como sigue:

[1] Aquí estamos usando las letras *mu* y *nu* para representar cualesquier símbolos individuales constantes o variables.

1. Wgf
2. $g = m$
3. Wm $\quad /\therefore (\exists x)(Wx \cdot Wxf)$
4. Wg $\quad$ 2, 3, Id.
5. $Wg \cdot Wgf$ $\quad$ 4, 1, Conj.
6. $(\exists x)(Wx \cdot Wxf)$ $\quad$ 5, **EG**

Una demostración alternativa para el segundo argumento sería la siguiente:

4. Wmf $\quad$ 1, 2, Id.
5. $Wm \cdot Wmf$ $\quad$ 3, 4, Conj.
6. $(\exists x)(Wx \cdot Wxf)$ $\quad$ 5, **EG**

Una tercera ilustración es la que provee el argumento:

> **Sólo un hombre calvo porta una peluca. Kaplan es un hombre que porta una peluca. Este hombre no es calvo. Por lo tanto, este hombre no es Kaplan.**

Usando los símbolos "t", "k", "Mx", "Bx", "Wx", para abreviar "este hombre", "Kaplan", "x es un hombre", "x es calvo" y "x porta una peluca", podemos simbolizar este argumento y demostrar su validez como sigue:

1. $(x)[(Mx \cdot Wx) \supset Bx]$
2. $Mk \cdot Wk$
3. $\sim Bt$ $\quad /\therefore \sim(t = k)$
4. $(Mk \cdot Wk) \supset Bk$ $\quad$ 1, UI
5. Bk $\quad$ 4, 2, M.P.
6. $\sim(t = k)$ $\quad$ 3, 5, Id.

Esta última demostración sirve para mostrar que usamos el principio de Identidad no sólo para inferir $\Phi\nu$ de $\Phi\mu$ y $\nu = \mu$ sino también para inferir $\sim(\nu = \mu)$ a partir de $\Phi\nu$ y $\sim\Phi\mu$. Para ser completos, y por conveniencia incluimos en nuestro enunciado del principio de Identidad su simetría y su reflexividad total, aunque su simetría rápidamente se deduce de las otras propiedades. Nuestra formulación es

Id. $\dfrac{\begin{array}{l}\Phi\mu \\ \nu = \mu\end{array}}{\therefore \Phi\nu}$, $\quad \dfrac{\begin{array}{l}\Phi\mu \\ \sim\Phi\nu\end{array}}{\therefore \sim(\nu = \mu)}$, $\quad \dfrac{\nu = \mu}{\therefore \mu = \nu}$, $\quad$ y $\quad \dfrac{p}{\therefore \mu = \mu}$

Un uso importante paralelismo de identidad lo tenemos en la formulación de ciertos tipos comunes de enunciados exceptivos. Si deseamos simbolizar la proposición

> **Alberto está en el equipo y es más rápido que cualquier otro miembro del equipo.**

usando "a" por "Alberto", "Tx" por "x está en el equipo" y "Oxy" por "x es más rápido que y", no podemos simplemente escribir

$$Ta \cdot (x)(Tx \supset Oax)$$

pues esto acarrearía

$$Oaa$$

que es falso porque *ser más rápido que* es una relación irreflexiva. La fórmula precedente no traduce la proposición dada, sino más bien la proposición necesariamente falsa:

Alberto está en el equipo y es más rápido que cualquiera de sus miembros.

En esta segunda proposición falta la importante palabra "otro". La primera proposición no afirma que Alberto sea más rápido que *cualquier* miembro del equipo sino que cualquier *otro* "esto es", cualquiera que esté en el equipo y que sea otro que, o no idéntico a, Alberto. La traducción apropiada de la primera proposición es

$$Ta \cdot (x)\{[Tx \cdot \sim(x = a)] \supset Oax\}$$

Si adoptamos la convención de abreviar $\sim(\nu = \mu)$ como $\nu \neq \mu$, la fórmula precedente puede escribirse

$$Ta \cdot (x)[(Tx \cdot x \neq a) \supset Oax]$$

Haciendo un uso semejante del signo de Identidad, podemos simbolizar las proposiciones

Sólo Juan ama a María.

y

María puede tolerar a cualquiera menos a Juan.

como

$$Ljm \cdot (x)(x \neq j \supset \sim Lxm)$$

y

$$\sim Tmj \cdot (x)[(Px \cdot x \neq j) \supset Tmx]$$

Una técnica similar puede usarse al simbolizar la noción expresada por las frases "a lo más" y "no más que". Así, el enunciado,

Hay cuando más una inauguración.

interpretada no como afirmando que hay una inauguración sino que *no hay* más de una, se puede simbolizar como

$$(x)(y)[(Ox \cdot Oy) \supset x = y]$$

De manera semejante, el enunciado

No se permiten más de dos visitantes.

interpretado como dejando abierta la cuestión de si hay visitantes en absoluto se puede simbolizar

$$(x)(y)(z)[(Vx \cdot Vy \cdot Vz) \supset (x = z \vee y = z \vee x = y)]$$

El signo de identidad es también útil al simbolizar la noción de *a lo menos*. No se necesita para "a lo menos uno", pues el cuantificador existencial es suficiente para esto en sí mismo; así, el enunciado

Hay a lo menos un solicitante.

se simboliza

$$(\exists x)Ax$$

Pero para simbolizar

Hay cuando menos dos solicitantes.

necesitamos el signo de identidad al escribir

$$(\exists x)(\exists y)[Ax \cdot Ay \cdot x \neq y]$$

Poniendo juntas las notaciones para "al menos uno" y "a lo más uno" tenemos un método para simbolizar las proposiciones numéricas definidas. Así, el enunciado

Hay un libro sobre mi escritorio.

que significa *exactamente* uno, se simboliza, usando "Bx" por "x es un libro" y "Dx" por "x está sobre mi escritorio", como

$$(\exists x)\{Bx \cdot Dx \cdot (y)[(By \cdot Dy) \supset y = x]\}$$

Y el enunciado

Cada estado elige dos senadores.

significando *exactamente* dos, se simboliza usando "Sx" por "x es un estado", "Nx" por "x es un senador" y "Exy" por "x elige y", como

$$(x)\{Sx \supset (\exists y)(\exists z)[Ny \cdot Nz \cdot Exy \cdot Exz \cdot y \neq z \cdot \\ (w)[(Nw \cdot Exw) \supset (w = y \vee w = z)]]\}$$

Finalmente, el enunciado (presumiblemente falso)

Cerbero tiene tres cabezas.

se simboliza usando "Hx" por "x es una cabeza de Cerbero", como

$$(\exists x)(\exists y)(\exists z)\{Hx \cdot Hy \cdot Hz \cdot x \neq y \cdot y \neq z \cdot x \neq z \cdot \\ (w)[Hw \supset (w = x \vee w = y \vee w = z)]\}$$

La notación presente es adecuada para simbolizar enunciados aritméticos respecto a los individuos, pero simbolizar proposiciones de aritmética pura requiere una herramienta lógica más poderosa como la que se sugiere en la sección siguiente.

Es muy raro que un individuo tenga dos nombres propios diferentes ν y μ, de modo que $\mu = \nu$ sea un enunciado significativo e informativo. Sin embargo, a menudo se refiere a los individuos por medio de frases descriptivas y no por medio de sus nombres propios. Así, cuando se ha cometido un crimen y la policía no ha encontrado todavía al que lo cometió los periódicos no por eso quedan en silencio sino que se refieren al individuo en cuestión como "el secuestrador del hijo de Lindbergh" o "el conductor del automóvil desaparecido".

La palabra "el" (la, lo, etc.) tiene varios usos. En un sentido tiene la fuerza de "todos" o "cualquiera", como en "La ballena es un mamífero". Pero en otro sentido sirve para indicar *existencia* y *unicidad*, como en las frases

El autor de *Fuenteovejuna*.
El hombre que mató a Lincoln.
La ciudad más grande de Yucatán.

que se refieren a Lope de Vega, Booth y Mérida, respectivamente. Una notación bastante estandarizada para *este* sentido de la palabra "el" involucra una iota invertida. Las tres frases de antes se simbolizan (parcialmente) como

$(\imath x)$(x escribió *Fuenteovejuna*).
$(\imath x)$(x es un hombre $\cdot$ x mató a Lincoln).
$(\imath x)$(x es una ciudad de Yucatán $\cdot$ x es mayor que cualquier otra ciudad de Yucatán).

En general, una fórmula tal como "$(\imath x)$ (x escribió *Fuenteovejuna*)" se lee como "el x que escribió Fuenteovejuna" y se trata como un nombre propio. Siendo esto así podemos reemplazar la variable individual μ en la función proposicional $\Psi\mu$ por $(\imath\nu)(\Phi\nu)$ para obtener $\Psi(\imath\nu)(\Phi\nu)$ como una instancia de sustitución.

Normalmente, una descripción definida en un argumento funciona como lo hace un nombre propio. El principio de Identidad nos permite inferir la conclusión "Scott escribió *Marmion*" a partir de las premisas "Scott es el autor de *Waverley*" y "el autor de *Waverley* escribió *Marmion*". La proposición "algo es más grande que Detroit" válidamente se infiere por **EG** de la premisa "la ciudad más grande de Illinois es mayor que Detroit". Desde luego, **EI** instancia solamente con una variable y UG generaliza solamente de una variable, de modo que no hay diferencia con respecto a estos dos principios entre un nombre propio y una descripción definida. Pero con respecto al principio de Instanciación Universal surgen ciertas diferencias y dificultades.

Cuando la letra "F" designe un atributo, el símbolo complejo "$(\iota x)(Fx)$" se refiere a un individuo que tiene el atributo F *si* hay un tal individuo y solamente uno. Pero, ¿qué pasa si no hay individuo tal o hay más de un individuo con este atributo? En tal caso, como no hay un individuo único al cual referirse por medio de la expresión "$(\iota x)(Fx)$", esa expresión no tiene referencia. El problema de interpretar frases que aparentan referirse, pero que no lo hacen en realidad, se pueden manejar de la siguiente forma debida a Russell.[2] Una definición explícita de un símbolo se da presentando otro símbolo que le es equivalente en significado. Así, el símbolo "soltero" se define explícitamente igualándolo a la frase "hombre no casado". Un método alternativo de explicar el significado de un símbolo es dar una definición contextual y no explícita del mismo. Una definición contextual de un símbolo no explica el significado del símbolo aislado sino más bien explica el significado de cualquier enunciado o contexto en el que ocurre ese símbolo. No damos una explicación de la palabra "el" (o sea el símbolo iota) aislada sino que la presentamos en un método para interpretar toda oración o fórmula en el que aparezca. Una definición contextual se llama también una "definición en uso". El análisis de Russell de la descripción definida consiste en una definición contextual o definición en uso de la palabra "el" en el sentido en que significa existencia y unicidad. Consideremos la proposición

El autor de *Waverley* fue un genio.

Parece afirmar 3 cosas: primeramente que

Hay un individuo que escribió *Waverley*.

en segundo lugar que

A lo más, un individuo escribió *Waverley*.

y finalmente que

Tal individuo fue un genio.

---

[2] Véase "On Denoting", *Mind*, n.s. Vol. 14 (1905). El artículo de Russell junto con los tratamientos alternativos debidos a G. Frege y P. F. Strawson está reimpreso en la Parte III de *Contemporary Readings in Logical Theory*, editado por I. M. Copi y J. A. Gould, New York y London, The Macmillan Company, 1967.

Las tres partes de su significado se pueden simbolizar —sin el uso de la iota— como sigue:

$$(\exists x)(x \text{ escribió } \mathit{Waverley})$$

$$(y)(y \text{ escribió } \mathit{Waverley} \supset y = x)$$

y

$$x \text{ fue un genio.}$$

Juntando estas 3 frases, se obtiene

$$(\exists x)\{(x \text{ escribió } \mathit{Waverley}) \cdot (y)(y \text{ escribió } \mathit{Waverley} \supset y = x) \cdot (x \text{ fue un genio})\}$$

Tenemos aquí una traducción simbólica del enunciado dado que no contiene la palabra un tanto problemática "el" ni sinónimo alguno de la misma. En general, cualquier enunciado de la forma

El tal y tal es cual y cual.

o cualquier fórmula tal como

$$\Psi(\imath x)(\Phi x)$$

se ve como lógicamente equivalente a

$$(\exists x)\{(x \text{ es tal y tal}) \cdot (y)(y \text{ es tal y tal} \supset y = x) \cdot (x \text{ es cual y cual})\}$$

o como

$$(\exists x)\{\Phi x \cdot (y)(\Phi y \supset y = x) \cdot \Psi x\}$$

Incidentalmente, cuando una propiedad está expresada en la forma superlativa de "el mejor", "el más rápido", "el más pesado" y cosas semejantes, cualquier proposición que la contenga se podrá expresar usando solamente las formas comparativas "mejor", "más rápido", "más pesado" o semejantes. Así, el enunciado

El océano más grande se encuentra al occidente de América.

se puede simbolizar, usando "Ox" por "x es un océano", "Wx" por "x está al oeste de América" y "Lxy" por "x es mayor que y", mediante

$$(\exists x)\{Ox \cdot (y)[(Oy \cdot y \neq x) \supset Lxy] \cdot Wx\}$$

Una descripción definida sólo se usa, de ordinario, cuando se cree que tiene referencia. Uno normalmente usa las palabras "el tal y tal", sólo cuando cree que hay uno y solamente un tal y tal. Pero las creencias suelen estar equivocadas y a veces usa uno una frase semejante, aunque carezca de referencia. Cuando no la tiene, toda oración que afirme que el *tal y tal* tiene cual y cual atributo o está en ésta o aquella relación, es falsa. Así, aunque pudiera ser verdadero que cada cosa tiene una masa, es *falso* que

El hombre inmortal tiene masa.

pues esta oración afirma la existencia de exactamente un hombre inmortal siendo que no lo hay Y a menos que ocurra en algún contexto que aclare que a una montaña en particular es a la que se refiere o que las *montañas en general* son las discutidas, el enunciado

La montaña tiene masa.

es falsa, pues afirma que sólo hay una montaña, siendo que hay muchas. Estas observaciones debieran servir para aclarar que una frase de la forma "el tal y tal", o un símbolo del tipo "$(\imath x)(Fx)$" no puede ser instanciado sólo por el principio de Instanciación Universal. Para deducir la conclusión "$G(\imath x)(Fx)$" de "$(x)Gx$" necesitamos la premisa adicional de que hay exactamente una cosa que es un F. Si falta esa premisa la inferencia es inválida. Pero si está la premisa presente, el argumento fácilmente se demuestra válido como sigue:

1.	$(x)Gx$	
2.	$(\exists x)[Fx \cdot (y)(Fy \supset y = x)]$	$/ \therefore G(\imath x)(Fx)$
→ 3.	$Fx \cdot (y)(Fy \supset y = x)$	
4.	Gx	1, **UI**
5.	$Fx \cdot (y)(Fy \supset y = x) \cdot Gx$	3, 4, Conj.
6.	$(\exists x)\{Fx \cdot (y)(Fy \supset y = x) \cdot Gx\}$	5, **EG**
7.	$(\exists x)\{Fx \cdot (y)(Fy \supset y = x) \cdot Gx\}$	2, 3–6, **EI**
8.	$G(\imath x)(Fx)$	7—definición

Cualquier proposición de la forma $\Psi(\imath x)(\Phi x)$ es falsa si no hay x que sea Φ o si hay más de uno de ellos. En una proposición semejante la frase descriptiva $(\imath x)(\Phi x)$ se dice que tiene una ocurrencia *primaria*. Pero una proposición que contiene una frase descriptiva puede ser parte de un contexto (veritativo funcional) más grande, en donde la frase descriptiva se dirá que tiene una ocurrencia *secundaria*. Una proposición en la que $(\imath x)(\Phi x)$ tiene una ocurrencia secundaria, puede ser verdadera aunque no haya x que sea Φ o haya más de uno de ellos. Uno de los ejemplos más simples, $\sim\Psi(\imath x)(\Phi x)$ podría significar que

(1) $$(\exists x)\{\Phi x \cdot (y)(\Phi y \supset y = x) \cdot \sim\Psi x\}$$

o que

(2) $$\sim(\exists x)\{\Phi x \cdot (y)(\Phi y \supset y = x) \cdot \Psi x\}$$

Si no hay x que sea Φ o hay más de uno, (1) es falsa y (2) es verdadera. Para hacer definidas y no ambiguas, proposiciones que de otra manera serían ambiguas, Russell propuso usar fórmulas de la forma $(\imath x)(\Phi x)$ como una especie de "indicador de alcance". Pero las reglas que gobiernan éstas son muy complicadas, y para ellas no tendremos utilización aquí. De hecho, no usaremos las fórmulas de la forma $(\imath x)(\Phi x)$, sino usaremos en su lugar la traducción simbólica explícita que involucra cuantificadores y el símbolo de identidad.

EJERCICIOS

Demostrar la validez de los siguientes argumentos usando solamente el símbolo de identidad, además de las abreviaciones indicadas:

1. El arquitecto que diseñó el Tappan Hall solamente diseña edificios de oficinas. Por lo tanto, el Tappan Hall es un edificio de oficinas. (*Ax*: *x* es un arquitecto. *t*: Tappan Hall. *Dxy*: *x* diseñó *y*. *Ox*: *x* es un edificio de oficinas.)
*2. El profesor de griego de la Escuela Preparatoria es muy instruido. Por lo tanto, todos los profesores de griego de la Escuela Preparatoria son muy instruidos. (*Px*: *x* es un profesor de griego. *Sx*: *x* está en la Escuela Preparatoria. *Lx*: *x* es muy instruido.)
3. El estado más pequeño está en Nueva Inglaterra. Todos los estados de Nueva Inglaterra son primordialmente industriales. Por lo tanto, el estado más pequeño es primordialmente industrial. (*Ex*: *x* es un estado. *Nx*: *x* está en Nueva Inglaterra. *Ix*: *x* es primordialmente industrial. *Mxy*: *x* es menor que *y*.)
*4. El corredor más rápido es un escandinavo. Por lo tanto, cualquiera que no sea escandinavo puede ser vencido en una carrera por alguna persona (o alguna otra). (*Sx*: *x* es un escandinavo. *Px*: *x* es una persona. *Fxy*: *x* corre más rápidamente que *y*.)
5. Todos los participantes serán vencedores. Habrá cuando más un vencedor. Hay cuando más un participante. Por lo tanto, hay exactamente un participante. (*Px*: *x* es un participante. *Vx*: *x* será vencedor.)
*6. Cualquier pez puede nadar más rápidamente que uno más pequeño. Por lo tanto, si hay un pez más grande, entonces habrá un pez más rápido. (*Fx*: *x* es un pez. *Lxy*: *x* es mayor que y. *Sxy*: *x* puede nadar más rápidamente que *y*.)
7. Adams y Brown fueron los únicos invitados al banquete, que bebieron. Todos los invitados al banquete que llevaron licor bebieron. Adams no llevó licor. Si algún invitado al banquete bebió entonces algún invitado al banquete que bebió debió llevar licor. Todos los que bebieron se embriagaron. Por lo tanto, el invitado al banquete que llevó licor se embriagó. (*a*: Adams. *b*: Brown. *Ix*: *x* fue un invitado al banquete. *Bx*: *x* bebió. *Lx*: *x* llevó licor. *Ex*: *x* se embriagó.)
8. Cualquiera que haya escalado el Monte Blanco es más valeroso que cualquiera que no lo haya hecho. Sólo el miembro más joven de nuestro equipo ha escalado el Monte Blanco. Todos los miembros de nuestro equipo son veteranos. Por lo tanto, el miembro más valeroso de nuestro equipo es un veterano. (*Ex*: *x* ha escalado el Monte Blanco. *Nx*: *x* está en nuestro

equipo. Ix: x es un veterano. Vxy: x es más valeroso que y. Mxy: x es mayor que y.)

9. Hay exactamente un centavo en mi mano derecha. Hay exactamente un centavo en mi mano izquierda. No hay nada en mis dos manos a la vez. Por lo tanto, hay exactamente dos centavos en mis manos. (Cx: x es un centavo. Dx: x está en mi mano derecha. Ix: x está en mi mano izquierda.)
10. Todos los acompañadores eran gaiteros. Todos los gaiteros estaban en la barraca. Cuando más, dos individuos estaban en la barraca. Había por lo menos dos acompañadores. Por lo tanto, había exactamente dos gaiteros. (Ax: x era un acompañador. Gx: x era un gaitero. Bx: x estaba en la barraca.)

5.5. Variables Predicadas y Atributos de Atributos

En toda la discusión que precede, se ha confinado la cuantificación a las variables individuales. Con la excepción de las letras griegas *fi* y *psi*, todos los símbolos de atributos y los símbolos de relaciones que se han introducido han sido *constantes*. Las letras "W", "S" y "B" en nuestro uso de "Wx", "Sxy" y "$Bxyz$" como abreviaciones de "x es sabio", "x es un hijo de y" y "x está entre y y z", han designado atributos definidos de, o relaciones entre, individuos. Sin embargo, las variables de atributos y las variables de relaciones se pueden introducir también y cuantificarse.

Poniendo a un lado las letras mayúsculas "F", "G", "H", como variables de atributos o relaciones y refiriéndose a ellas indiferentemente como "variables predicadas", entonces las mismas técnicas de cuantificación que ya nos son familiares permitirán simbolizar una gran variedad de enunciados. Estaremos en posibilidad de simbolizar enunciados respecto a todos o algunos de los atributos o relaciones que las cosas puedan tener o en las cuales las cosas puedan estar. La expresión

$$Fx$$

que consiste en una variable predicada y una variable individual yuxtapuesta, en ese orden, se puede considerar como una función proposicional de dos variables. Por instanciación con respecto a las dos variables obtenemos proposiciones singulares como "Sócrates es mortal" y "Platón es sabio" que se expresan simbólicamente como "Ms" y "Wp". Por instanciación respecto a la variable predicada y generalización respecto a la variable individual obtenemos proposiciones simplemente generales ya familiares tales como

$(x)Mx$ (todo es mortal)

$(\exists x)Wx$ (algo es sabio)

Todas éstas las hemos visto antes. Un nuevo tipo de proposición, sin embargo, aunque todavía simplemente general, se obtiene por instanciación con respecto a la variable individual y generalización con respecto a la variable predicada. Aquí tenemos

$(F)Fs$ (Sócrates tiene todos los atributos)

$(\exists F)Fp$ (Platón tiene algún atributo)

Finalmente, generalizando con respecto a ambas variables se obtienen las siguientes proposiciones doblemente generales:

(1) $(x)(F)Fx$	(5) $(F)(x)Fx$
(2) $(x)(\exists F)Fx$	(6) $(F)(\exists x)Fx$
(3) $(\exists x)(F)Fx$	(7) $(\exists F)(x)Fx$
(4) $(\exists x)(\exists F)Fx$	(8) $(\exists F)(\exists x)Fx$

De éstas, (1) y (5) son claramente equivalentes, pues (1) afirma que

Toda cosa tiene todo atributo.

y (5) afirma que

Todo atributo pertenece a toda cosa.

Las proposiciones (4) y (8) también son equivalentes entre sí, pues (4) afirma que

Alguna cosa tiene algún atributo.

y (8) afirma que

Algún atributo pertenece a alguna cosa.

Las proposiciones restantes, sin embargo, son todas distintas. Se les puede expresar en castellano como

(2) Toda cosa tiene algún atributo (o algún otro).
(3) Hay una cosa que tiene todo atributo.
(6) Todo atributo pertenece a alguna cosa (o alguna otra).
(7) Hay un atributo que pertenece a todas las cosas.

No hay equivalencias aquí, pero la proposición (3) lógicamente acarrea la proposición (6) y la proposición (7) lógicamente trae consigo la proposición (2). Estas implicaciones formalmente pueden establecerse por medio de nuestras reglas familiares de cuantificación, permitiendo los símbolos "μ" y "ν" de las reglas para denotar las variables predicadas así como las variables individuales con las mismas restricciones sobre su aplicación, claro está.

Cuando las variables predicadas se introducen y se permite su cuantificación se puede dar una definición completamente simbólica, esto es, formal, para el símbolo de identidad. La definición es

$$(x = y) = df\,(F)(Fx \equiv Fy)$$

De esta definición tenemos

$$(x)(y)[(x = y) \equiv (F)(Fx \equiv Fy)]$$

como consecuencia lógica. Y de la última se pueden deducir todos los atributos de la relación de identidad.

En su mayor parte, nuestra discusión precedente ha concernido solamente a los atributos de las cosas. Pero las cosas no son las únicas entidades que tienen atributos. En la Sec. 5.3 discutimos varios atributos que se pueden atribuir a, o predicar de, las *relaciones*. Y los atributos mismos pueden tener atributos: así el atributo de ser *honesto* tiene el atributo de ser *deseable*; una *virtud* (que es un atributo) puede a su vez tener el atributo de ser *rara*; y el atributo de ser *desconsiderado* tiene el atributo de ser *común*.

Una vez que se ha notado que algunos atributos pueden predicarse de otros atributos llega la tentación de predicar ciertos atributos de sí mismos. Por ejemplo, el atributo de ser abstracto parece él mismo ser abstracto, mientras que el atributo de ser concreto no parece en sí, ser concreto. Cualquier atributo que se puede con verdad predicar de sí mismo se dirá que es un atributo *predicable*. Así, ser predicable es un atributo que pertenece a todos aquellos y solamente aquellos atributos que pueden ser predicados verdaderamente de sí mismos. Por el otro lado, todo atributo que no puede ser verdadero predicado de sí mismo se dirá que es un atributo *impredicable*. Así, ser impredicable es un atributo que pertenece a todos aquellos y solamente aquellos atributos que no pueden ser verdaderos predicados de sí mismos.

Si ahora nos preguntamos si el atributo de ser impredicable puede ser predicado verdaderamente de sí mismo o no puede serlo, llegamos a la siguiente conclusión triste. Si el atributo de ser impredicable *puede* ser predicado con verdad de sí mismo, entonces *tiene* el atributo de ser impredicable, de donde se sigue por definición que *no puede* ser verdaderamente predicado de sí mismo. Por el otro lado, si el atributo de ser impredicable *no puede* ser verdadero predicado de sí mismo, entonces como todos los otros atributos que no pueden ser verdaderos predicados de sí mismos, *tiene* el atributo de ser impredicable, lo cual quiere decir que *puede* ser verdadero predicado de sí mismo. Hemos así llegado a una contradicción.

La contradicción se puede derivar más claramente simbolizando el atributo de ser impredicable con "*I*" definiéndolo formalmente como

$$IF = df \sim FF$$

cuya definición tiene la siguiente proposición general como una consecuencia lógica inmediata:

$$(F)(IF \equiv \sim FF)$$

De la última, por el principio de Instanciación Universal, podemos instanciar con respecto a "*I*" mismo para obtener

$$II \equiv \sim II$$

que es una contradicción explícita.[3]

Se han propuesto muchos métodos para evitar estas contradicciones. Uno de los mejor conocidos es la Teoría (simple) de los Tipos Lógicos[4] de Russell de la que podemos dar la siguiente formulación general. De acuerdo con Russell las entidades se dividen en una jerarquía de tipos lógicos diferentes, el más bajo de los cuales consiste en todos los individuos, el siguiente en todos los atributos de individuos, el siguiente en todos los atributos de atributos de individuos, el siguiente en todos los atributos de atributos de atributos de individuos, y así sucesivamente. Las relaciones y sus atributos nos dan otras jerarquías que ignoraremos en esta discusión. El punto esencial en la teoría de los tipos no es meramente la división de todas las entidades en tipos lógicos diferentes sino la restricción de que cualquier atributo que pueda significativamente predicarse de una entidad de un tipo lógico no puede significativamente predicarse de cualquier entidad de cualquier otro tipo lógico. Para algunos atributos la teoría de los tipos parece perfectamente

---

[3] Ver *Principles of Mathematics*, de Russell, Cambridge, Inglaterra, 1903, Págs. 79-80, 97-98 y 102. Ver también *Logical Syntax of Language*, de Carnap, New York, 1937, Pág. 211.

[4] Russell formuló inicialmente su teoría de los tipos lógicos en el apéndice B de su *Principles of Mathematics*. Una versión más complicada de la teoría, escrita para atacar ciertos problemas de otra índole también, se presentará en el Apéndice C de este volumen. Véase también "Mathematical Logic as Based on the Theory of Types" de Russell, *American Journal of Mathematics*, Vol. 30 (1908), Págs. 222-262, reimpreso en *Bertrand Russell: Logic and Knowledge. Essays 1901–1950*, editado por Robert Charles Marsh, Londres, 1956 y el Cap. 2 de la Introducción a la primera edición de *Principia Mathematica* por Whitehead y Russell, Cambridge, Inglaterra, 1910-1913. El lector interesado debiera consultar también *The Theory of Logical Types* por Irving M. Copi, Londres, 1971, Routledge and Kegan Paul. La solución alternativa mejor conocida de la contradicción es la clase de teoría de conjuntos axiomática publicada primeramente por E. Zermelo en "Untersuchugen über die Grundlagen der Mengenlehre I" *Mathematische Annalen*, Vol. 65 (1908), Págs. 261-281. El artículo de Zermelo fue traducido por S. Bauer-Mengelberg como "Investigations in the Foundations of Set Theory I" en *De Frege a Gödel* por Jean van Heijenoort, Cambridge, Mass., 1967. Una discusión brillante de estas alternativas puede encontrarse en Willard van Orman Quine, *Set Theory and Its Logic*, Cambridge, Mass., 1963.

obvia. Así, una cosa individual puede ser de color naranja, pero claramente no tiene sentido decir de algún atributo que es de color naranja. Y un atributo puede tener muchas instancias, pero no tiene sentido ni afirmar ni negar que una cosa individual tenga muchas instancias.

La motivación primordial para aceptar la teoría de los tipos lógicos, sin embargo, no es ni su naturalidad ni su obviedad, sino el hecho que permite evitar contradicciones como la del pretendido atributo "impredicable". De acuerdo con esta teoría el tipo de un atributo debe ser más alto que el tipo de cualquier entidad de la cual se pueda significativamente predicar. Consecuentemente, no tiene sentido ni afirmar ni negar de ningún atributo que pertenezca a sí mismo; expresiones como "FF" y "$\sim FF$" deben rechazarse por carentes de significado. En consecuencia, no es posible definir el atributo "impredicable" y la contradicción desaparece. La versión de la teoría de los tipos que acabamos de bosquejar recibe a veces el nombre de "Teoría Simple de los Tipos" y es suficiente para descartar todas las contradicciones de esta índole. Tiene también cierta consonancia con el sentido común. No obstante, existen soluciones alternativas o maneras de evitar las contradicciones de modo que la teoría de los tipos lógicos no puede ser vista como *la* solución. Ha sido ampliamente aceptada, sin embargo, y aquí la seguiremos al introducir un nuevo tipo de símbolo para representar atributos de atributos de individuos.

Algunas palabras tienen más de un solo significado, desde luego, y en cierto sentido designan un atributo de individuos y en otro sentido designan un atributo de atributos de individuos. Así, la palabra "raro" en un sentido designa un atributo de atributos de individuos: un atributo de individuos es raro si está ejemplificado por solamente unos cuantos individuos y en este sentido no se le puede afirmar o negar significativamente de los individuos mismos. Pero por otro lado, hay un sentido *diferente* de la palabra "raro" en el que designa un atributo de una masa individual de gas, y en este sentido no se le puede afirmar o negar significativamente de un atributo. Para evitar la ambigüedad simbolizamos los atributos de atributos de individuos con letras mayúsculas negras cursivas "$\boldsymbol{A}$", "$\boldsymbol{B}$", "$\boldsymbol{C}$", . . ., para evitar que se les confunda con atributos de individuos. Contando con esta nueva herramienta simbólica podemos traducir a nuestra notación proposiciones tales como "la impuntualidad es una falta" y "ser veraz es una buena cualidad". Aquí usamos "Ux", "Tx", "$\boldsymbol{F}F$", "$\boldsymbol{G}F$" para abreviar "x es impuntual", "x es veraz", "F es una falta" y "F es buena" y simbolizamos las dos proposiciones enunciadas como "FU" y "GT". También pueden simbolizarse proposiciones más complejas. Las proposiciones

Todos los atributos útiles son deseables.

y

Algunos atributos deseables no son útiles.

se pueden simbolizar usando los símbolos "UF" por "F es útil" y "DF" por "F es deseable", como

$$(F)(UF \supset DF)$$

y

$$(\exists F)(DF \cdot \sim UF)$$

Finalmente, la proposición

Tomás tiene todas las buenas cualidades de su madre.

se puede simbolizar usando los símbolos adicionales "t" por "Tomás" y "Mxy" por "x es madre de y", como

$$(F)\{(\exists x)[Mxt \cdot (y)(Myt \supset y = x) \cdot Fx \cdot GF] \supset Ft\}$$

o como

$$(\exists x)\{Mxt \cdot (y)(Myt \supset y = x) \cdot (F)[(Fx \cdot GF) \supset Ft]\}$$

EJERCICIOS

I. Simbolizar las siguientes proposiciones:

1. Nada tiene todos los atributos.
2. Algunos atributos no pertenecen a nada.
*3. No hay dos cosas que tengan todos sus atributos en común.
4. Cualesquier dos cosas tienen algún atributo común.
5. Napoleón tenía todos los atributos de un gran general. (n: Napoleón. Gx: x es un gran general.)
*6. David tiene todos los defectos de su padre y ninguna de sus virtudes. (d: David. Fxy: x es padre de y. FF: F es un defecto. VF: F es una virtud.)
7. Jones y Smith comparten todas sus buenas cualidades, pero no tienen malas cualidades en común. (j: Jones. s: Smith. BF: F es una buena cualidad. MF: F es una mala cualidad.)
8. Nada que posea todos los atributos raros tiene un atributo ordinario. (RF: F es raro. OF: F es ordinario.)
*9. Una persona que posea todas las virtudes es una persona virtuosa, pero hay personas virtuosas que no poseen todas las virtudes. (Mx: x es una persona. Vx: x es un individuo virtuoso. VF: F es una virtud.)

10. Cada cual tiene algún atributo no usual (o algún otro atributo no usual); sería no usual la persona que careciese de atributos no usuales. (PX: x es una persona. Ux: x es un individuo no usual UF: F es un atributo no usual.)

II. Demostrar las siguientes:

1. $[(x)(F)Fx] \equiv [(F)(x)Fx]$
*2. $[(\exists x)(\exists F)Fx] \equiv [(\exists F)(\exists x)Fx]$
3. $[(\exists x)(F)Fx] \supset [(F)(\exists x)Fx]$
4. $[(\exists F)(x)Fx] \supset [(x)(\exists F)Fx]$
5. $[(\exists R)(x)(\exists y)Rxy] \supset [(x)(\exists y)(\exists R)Rxy]$

*6. Toda relación (diádica) que sea transitiva e irreflexiva es asimétrica.
7. Todas las relaciones diádicas intransitivas son irreflexivas.
8. Cualquier relación diádica que tenga todo individuo con algún individuo (o algún otro) es totalmente reflexiva si es tanto simétrica como transitiva.
9. De la premisa "$(x)(y)[(x = y) \equiv (F)(Fx \equiv Fy)]$" (que es verdadera por definición), deducir que la relación de identidad es simétrica no usando el principio Id.
*10. A partir de la misma premisa de 9 y bajo la misma restricción deducir que la relación de identidad es totalmente reflexiva.
11. De la misma premisa que el ejercicio 9 y con la misma restricción deducir que la relación de identidad es transitiva.
12. Si los círculos son elipses, entonces los círculos tienen todas las propiedades de las elipses.
13. Todas las relaciones (diádicas) que son tanto simétricas como transitivas son reflexivas.

6

Sistemas Deductivos

6.1. Definición y Deducción

En los capítulos precedentes se ha presentado cierto número de principios de la lógica. Estos principios constituyen ciertos conocimientos respecto a la lógica, pero no constituyen una *ciencia* de la lógica, pues una *ciencia* es conocimiento *organizado*. De ninguna simple lista o catálogo de verdades se dirá nunca que constituye un sistema de conocimiento o una ciencia. Tenemos conocimiento científico sólo cuando las proposiciones que presentan lo que sabemos están organizadas de manera sistemática, para exhibir sus relaciones mutuas. Si un sistema de la lógica o una ciencia de la lógica o una ciencia de los principios lógicos es lo que debe llevarse a cabo, dichos principios deberán estar arreglados u organizados de manera sistemática. Esta es la tarea que intentaremos, en una escala limitada, en los siguientes capítulos. Pero antes será de interés considerar las cuestiones generales acerca de cuáles de las interrelaciones son importantes y cómo se pueden organizar las proposiciones en un sistema o ciencia.

Todo conocimiento que poseemos se puede formular en proposiciones y estas proposiciones están formadas por términos. En cualquier ciencia, algunas proposiciones pueden deducirse de otras proposiciones o demostrarse con base en ellas. Por ejemplo, las leyes de Galileo de la caída libre de los cuerpos y las leyes del movimiento planetario de Kepler; todas se pueden derivar de las leyes de Newton sobre la gravitación y el movimiento, y el descubrimiento de estas interrelaciones deductivas fue una fase excitante en el desarrollo de la *ciencia* de la física. Así, una relación importante entre las proposiciones de una ciencia es la deducibilidad. Las proposiciones que dan cuerpo al conocimiento respecto a una materia llegan a ser una *ciencia* de esta materia cuando se las arregla u ordena exhibiendo algunas de ellas como conclusiones deducidas de las otras.

En cualquier ciencia, ciertos términos involucrados en sus proposiciones pueden definirse basándose en otros términos. Por ejemplo, en la Física, la *densidad* se define como la masa por unidad de volumen, la aceleración se define como la *razón de cambio de la velocidad con respecto al tiempo*, y la *velocidad* a su vez se define como la *razón de cambio de la posición respecto al tiempo*. Esta definición de unos términos por medio de otros también sirve para revelar interrelaciones de las proposiciones. Muestra cómo conciernen a una materia común e integra los conceptos de la ciencia como las deducciones integran sus leyes o enunciados. Las proposiciones que dan cuerpo al conocimiento llegan a ser una *ciencia*, en parte, cuando algunas de las palabras o símbolos que contienen se definen en términos de sus otros símbolos.

El reconocimiento de la importancia de la definición y de la deducción, para cualquier ciencia, puede sugerir un ideal para los sistemas científicos. Se puede imaginar que en una ciencia ideal *todas* las proposiciones debieran *demostrarse*, deduciéndolas de otras, y *todos* los términos debieran *definirse*. Pero esto sería "ideal" sólo en el sentido de que es de realización imposible. Los términos se pueden definir sólo por medio de otros términos cuyo significado se presupone y deben estar entendidos previamente si se quiere que las definiciones expliquen los significados de los términos que se definen. Y las deducciones pueden establecer sus conclusiones sólo basándose en las premisas que deberán haber sido verificadas antes, si las conclusiones realmente han de quedar establecidas por las demostraciones. Por lo tanto, si todos los términos o símbolos de un sistema han de definirse *dentro del sistema*, debe haber o sucesiones infinitas de definiciones o definiciones circulares, como en un diccionario de bolsillo que define la palabra "amplio" con significado *extenso* y la palabra "extenso" como *amplio*. Es obvio que las definiciones circulares no tienen valor como explicaciones, y las sucesiones infinitas de definiciones tampoco tienen valor, pues ningún término quedará verdaderamente explicado sino hasta alcanzar el final y una sucesión infinita no tiene fin. De manera semejante, para demostrar *todas* las proposiciones deberá haber regresiones infinitas de demostraciones o demostraciones circulares. Y éstas no son menos objetables.

Debe admitirse que *dentro* de un sistema de proposiciones que constituye una ciencia no todas las proposiciones pueden demostrarse y no todos los términos pueden definirse. No es que haya alguna proposición en particular que no se pueda demostrar o algún término en particular que no se pueda definir sino que no se pueden demostrar *todas* o definir *todos* sin una regresión o una circularidad viciosa. El ideal de la ciencia, entonces, no puede ser un sistema en el que *cada* proposición se demuestre y *cada* término se defina sino que es una en que un número mínimo de proposiciones bastan para la deducción del resto de ellas y un número mínimo de términos son suficientes para definir todos los demás. Este ideal del conocimiento se describe como un *sistema deductivo.*

6.2. La Geometría Euclidiana

La geometría Euclidiana constituye el más antiguo de los ejemplos de conocimiento sistematizado o ciencia. Además de su propio interés histórico e importancia, tiene la ventaja (para nosotros) de ser un ejemplo con el que el lector ya ha entrado en contacto en la escuela secundaria.

Se reconoce generalmente que la geometría como ciencia fue originada y desarrollada por los griegos. Entre las contribuciones más importantes a su desarrollo se cuentan las de los matemáticos Pitágoras y Euclides. Pero los egipcios, milenios antes, poseían ya las verdades geométricas como lo atestiguan sus pirámides que ya eran antiguas en el tiempo de Pitágoras (siglo VI a. de J.C.). Hay evidencia de que los babilonios, muy anteriores, estaban familiarizados con varios principios de la geometría. Si el conocimiento geométrico ya existía antes de su tiempo, ¿en qué sentido fueron los griegos los que originaron la ciencia de la geometría? La respuesta ya la hemos indicado. Antes de Pitágoras el conocimiento geométrico del hombre consistía en una colección o catálogo de hechos casi completamente desconectados unos de otros. Las verdades geométricas sólo constituían una lista de reglas empíricas útiles para la medición de las tierras o la construcción de puentes y edificios, y no había sistema en su conocimiento de las verdades geométricas. Al introducir el orden en esta materia, los griegos la transformaron de una colección de hechos aislados de conocimiento en una ciencia.

El sistema fue introducido en la geometría mediante la deducción de algunas de sus proposiciones a partir de otras. Las proposiciones de la geometría fueron ordenadas enlistando antes aquellas que pudiesen usarse como premisas en las demostraciones de las que se escribían a continuación. Esta sistematización de la geometría la inició Pitágoras y la continuaron sus seguidores. Culminó en los *Elementos* de Euclides (alrededor de 300 a. de J.C.), en donde todas las proposiciones geométricas fueron ordenadas comenzando por los axiomas, las definiciones y los postulados, y continuando con los teoremas deducidos de las proposiciones iniciales. La geometría fue plasmada en la forma de un sistema deductivo por los griegos. Suyo es el primer sistema deductivo que se ideó y tan grande fue este logro que ha servido como modelo para el pensamiento científico desde entonces hasta nuestros días. Todavía hoy las ciencias más avanzadas son las que más se aproximan a la forma de un sistema deductivo. Estas son las ciencias que han alcanzado un número relativamente pequeño de principios muy generales de los cuales se derivan un número relativamente grande de otras leyes y casos especiales. Ciertas partes de la física se han formulado como sistemas deductivos y también se han hecho intentos semejantes, con resultados un tanto menos impresionantes, en partes de la biología y de la psicología. Tal vez el más audaz de los intentos hechos en esta dirección fue el de Spinoza, cuyo trabajo más importante, la *Etica*, fue escrito en forma "geométrica". Partiendo de axiomas y definiciones, Spinoza intentó deducir el resto de sus doctrinas metafísica y ética como teoremas demostrables fundados en estos supuestos iniciales.

Euclides inicia su geometría con las definiciones de algunos términos que usa en su desarrollo. Así, la Definición 1 dice: "un punto es aquello que no tiene partes", y la Definición 2 dice: "una línea es longitud sin ancho". Euclides no intenta definir *todos* sus términos, desde luego. Las dos primeras definiciones definen respectivamente los términos "punto" y "línea". Las palabras *usadas* en esas definiciones, tales como "partes", "longitud" y "ancho", no se definen sino que para Euclides se cuentan entre los *términos indefinidos* del sistema. Al introducir nuevos términos sus definiciones usan los términos previamente definidos tanto como los originales indefinidos. Así, la Definición 4 es: "Una línea recta es... [una línea] ... que yace igualmente entre sus puntos extremos";* no sólo usa términos indefinidos como "igualmente" y "entre" sino también los definidos previamente, "punto" y "línea".

El uso de los términos *definidos* es, desde el punto de vista de la lógica, sólo cuestión de conveniencia. Teóricamente, toda proposición que contiene términos definidos puede traducirse a una que sólo contenga términos indefinidos reemplazando cada aparición de un término definido por la secuencia de términos indefinidos usada para definirlo. Por ejemplo, el Postulado 1: "Se supone que de un punto a otro cualquiera es posible trazar una línea recta", que contiene los términos definidos "recta", "línea" y "punto" puede expresarse sin usar esos términos definidos, como: "Supóngase que se puede trazar una longitud sin anchura que yazca igualmente entre sus partes extremas que (en sí mismas) no tienen partes, de cualquier cosa que no tenga partes a cualquier otra cosa que no tenga partes". Pero esta versión del postulado es extremadamente torpe. Aunque en teoría se les puede eliminar, en la práctica se hace una economía considerable

* Estas son citas de "Las Geometrías no Euclidianas" por L. Santaló. (N. del T.)

de espacio, tiempo y esfuerzo usando términos definidos relativamente breves en vez de largas secuencias o combinaciones de los indefinidos.

Al establecer su sistema deductivo de la geometría, Euclides dividió sus proposiciones indefinidas en dos grupos, llamado el uno de los "Axiomas" y el otro, de los "Postulados". No obstante, él no dio razón para hacer esta división, y no parece haber una base clara para distinguirlos. Es posible que le pareciera que unos eran más *generales* que otros o psicológicamente más *obvios*. En nuestros días, se ha optado por no hacer la distinción, sino considerar todas las proposiciones iniciales no demostradas de un sistema deductivo en una misma categoría o posición y referirse a todas, indiferentemente, como "axiomas" o como "postulados" sin diferenciar los significados de esos dos términos.

Todo sistema deductivo, bajo pena de caer en un círculo o regresión viciosa, debe contener algunos axiomas (o postulados) que se suponen, pero no se demuestran en el sistema. No es necesario que se trate de suposiciones *precarias* o *meras* suposiciones. Puede ser que se les establezca con un gran cuidado y de manera muy convincente, pero *no se les demuestra dentro del sistema mismo.* Todo argumento con el que se intente establecer la verdad de los axiomas está, definitivamente, *fuera* del sistema, es decir, que es *extrasistemático.*

El concepto antiguo de la geometría euclidiana no sólo sostenía que todos los teoremas se seguían lógicamente de los axiomas y, por tanto, eran tan *verdaderos* como los axiomas, sino también que los axiomas eran *autoevidentes*. En esta tradición, todo enunciado es considerado "axiomático" cuando su verdad está más allá de cualquier duda, siendo evidente en sí mismo y no requiriendo demostración alguna. Sin embargo, por lo que hemos dicho se debería ver con claridad que nosotros *no* usamos la palabra "axioma" en *ese* sentido. No se pretende aquí que los axiomas de un sistema cualquiera sean verdaderos de manera autoevidente. Toda proposición de un sistema deductivo que se suponga, sin demostración en el sistema, es un axioma de ese sistema. Este punto de vista moderno ha surgido en gran medida como consecuencia del desarrollo histórico de la geometría y la física.

Por mucho tiempo se creyó en la verdad autoevidente de los axiomas (y los postulados) euclidianos. Pero no era una creencia que se tomara en forma muy entusiasta. La mayor parte de los axiomas, como el Axioma 9: "El todo es mayor que su parte", no se discutían; pero aunque no se dudase de la *verdad* del Axioma 12 (el famoso "Postulado de las paralelas"), la "autoevidencia" del mismo era objeto de muchas dudas. El Axioma 12, dice: "Si una línea recta encuentra dos líneas rectas, de modo que la unión de los dos ángulos internos del mismo lado sea menor que dos ángulos rectos, estas dos líneas rectas, prolongadas suficientemente y de manera continua, se encontrarán del lado en que se encuentran los ángulos interiores cuya unión es menor que dos ángulos rectos".[1] Proclo, un filósofo neoplatónico del siglo v a. de J.C., escribió el siguiente comentario: "Este debiera quitarse de los postulados, pues es un teorema de mucha dificultad. . ."[2] Es decir, que sin poner en duda que *fuera verdadero*, se negaba que fuera *autoevidente*, lo que se consideraba una razón suficiente para relegarlo de su elevada posición de axioma a la menos elevada posición de nada más que un teorema.

La historia de las matemáticas está llena de intentos para demostrar que la proposición citada es un teorema, ya sea deduciéndola de los otros axiomas de Euclides, o de dichos axiomas completados con algún supuesto adicional más cercano a la "autoevidencia". Ninguno de los intentos de esta última clase prosperó, porque todo supuesto adicional o alternativo al postulado de las paralelas, suficientemente fuerte para demostrar el postulado de las paralelas, resultó que no era más autoevidente que la hipótesis del mismo Euclides. La primera clase de intento también fracasó; simplemente no era posible deducir el postulado de las paralelas a partir de los otros. El intento más fructífero fue el del matemático italiano Gerolamo Saccheri (1667–1733) que *sustituyó* el postulado de las paralelas por otros supuestos, contrarios, y después trató de deducir una contradicción del conjunto de los otros postulados de Euclides y este sustituto. Si hubiese tenido éxito, habría logrado una demostración por *reducción al absurdo* del postulado de las paralelas. Dedujo muchos teoremas que consideró *absurdos* porque eran ajenos al sentido común o la intuición geométrica ordinaria. Así, creyó alcanzar el éxito en la demostración del postulado de las paralelas y en "reivindicar a Euclides". Pero los teoremas que dedujo, "absurdos" en el sentido de que violan las intuiciones geométricas ordinarias, *no* eran absurdos en el sentido matemático lógico de ser autocontradicciones. En vez de demostrar el postulado de las paralelas, lo que hizo (sin saberlo) Saccheri fue algo más importante: establecer y desarrollar, por primera vez, un sistema de geometría no euclidiana.

El postulado de las paralelas es, de hecho, *independiente* de los otros postulados euclidianos —pero esto no se *demostró* sino hasta

---

[1] Aparece como el Postulado 5 en *The Thirteen Books of Euclid's Elements*, Cambridge, Inglaterra, Cambridge University Press, 1926. Puede consultar las Págs. 202 y siguientes del Vol. I de esta obra el lector interesado en un buen estudio de la historia del postulado de las paralelas.

[2] Misma obra, Pág. 202.

los tiempos modernos—. Es independiente de los otros postulados en el sentido de que ni el postulado ni su negación es deducible de ellos. Lobachevsky y Riemann son los matemáticos más notables que desarrollaron los sistemas alternativos de geometría, las geometrías no euclidianas. A éstas se las consideró por mucho tiempo como ficciones ingeniosas, nada más que juegos matemáticos, en contraste con la geometría euclidiana que era "verdadera" respecto al espacio que nos rodea. Pero las investigaciones astronómicas posteriores, siguiendo los lineamientos dados por Einstein en su teoría de la relatividad tienden a mostrar que —hasta donde el problema es significativo— el espacio "real" o físico es más probablemente no euclidiano que euclidiano. En todo caso, la verdad o falsedad de sus axiomas es una cuestión puramente *externa* de cualquier sistema deductivo. La verdad de sus proposiciones es una consideración extrasistemática. Es sin duda importante en cuanto que un sistema deductivo es *conocimiento* ordenado; pero cuando concentramos nuestra atención en el sistema como tal, el *orden* es su característica más importante.

Desde el punto de vista puramente matemático o lógico, un sistema deductivo puede ser visto como un argumento vasto y complejo. Sus premisas son los axiomas, y su conclusión, la conjunción de todos los teoremas deducidos. Como ocurre con cualquier otro argumento, la cuestión lógica no atañe a la verdad o falsedad de sus premisas, sino a la validez de la inferencia. Concediendo que los axiomas sean verdaderos, ¿necesariamente se infiere la verdad de los teoremas? Es este el asunto que concierne al lógico y al matemático. La respuesta es, desde luego, afirmativa —*si* las demostraciones de los teoremas son todos argumentos válidos—. Luego el aspecto más importante de cualquier sistema deductivo es la solidez de los argumentos que constituyen sus teoremas. En el desarrollo riguroso de los sistemas deductivos, haciendo abstracción de la explicación extrasistemática de sus términos indefinidos, es obvio que la cuestión de verdad o falsedad no tiene cabida.

6.3. Sistemas Deductivos Formales

El sistema de geometría establecido por Euclides en sus *Elementos* contiene errores serios. De hecho, hay un error en su primera demostración. El defecto de esta demostración, de manera paradójica, es resultado del mucho saber del geómetra Euclides. No sólo hacía referencia a sus axiomas explícitamente enunciados como premisas, sino que también se basaba en lo que podría llamarse su intuición geométrica.[3] Cuando una cadena de argumento involucra nociones familiares, hay siempre el peligro de suponer más de lo que permiten suponer las premisas explícitamente enunciadas. Esto es grave en el desarrollo de un sistema deductivo, en particular, porque cualquier sistematización que haga uso de supuestos nuevos y no reconocidos, en la dedución de los teoremas, por ese hecho *fracasa* en el logro de su objetivo. En un sistema deductivo los teoremas deben deducirse *rigurosamente* a partir de los postulados enunciados. Si no se hace así, no importa qué tan verdaderos sean, el resultado no alcanza el objetivo de la sistematización.

Como los lapsos en el pensamiento riguroso son causados con más frecuencia por exceso de familiarización con el tema, los matemáticos han encontrado que es útil reducir al mínimo o incluso eliminar esta familiarización con el tema, y de este modo lograr más rigor. En el caso de la geometría, este fin se alcanza abstrayendo de los significados de las palabras geométricas tales como "punto", "línea" y "plano", y desarrollando los teoremas como consecuencias puramente formales de los postulados. Las palabras geométricas familiares, con todas sus asociaciones y sugestiones, se reemplazan por símbolos arbitrarios. En vez de los sistemas deductivos admitida y explícitamente concernientes a las entidades geométricas, hoy en día los matemáticos desarrollan sistemas deductivos *formales* cuyos términos primitivos o indefinidos incluyen símbolos arbitrarios, no interpretados, que por lo regular son letras de los alfabetos griego y latino. Puesto que los términos indefinidos de un sistema deductivo *formal* incluyen símbolos arbitrarios, sus postulados no son proposiciones en lo absoluto, sino fórmulas y lo mismo son los teoremas.

Puede haber relaciones deductivas entre las fórmulas, como las hay entre las proposiciones. Así, la fórmula: "Todos los F son H" es lógicamente deducible de las fórmulas "todos los F son G" y "todos los G son H". Puesto que los postulados y los teoremas de un sistema deductivo formal son fórmulas y no proposiciones, las demostraciones de los teoremas se pueden llevar a cabo sin el estorbo de las asociaciones familiares y los supuestos inconscientes. Además, como las fórmulas no son proposiciones, no se presenta la cuestión de su verdad, que no viene al caso.

Lo que se gana con el desarrollo formal de los sistemas deductivos es más que rigor. Como algunos de los símbolos de un sistema deductivo formal son símbolos arbitrarios no interpretados, es posible

---

[3] La demostración de Euclides y una breve discusión del error cometido pueden hallarse en las Págs. 241-243 del Vol. I de *The Thirteen Books of Euclid's Elements*, por Heath, obra anteriormente citada. Un ejemplo de la manera en que el mismo tipo de error puede llevar a conclusiones que son falsas aun autocontradictorias puede verse en las Págs. 77-78 de *Mathematical Recrations and Essays*, por W. W. Rouse Ball, New York, The Macmillan Co., 1940.

darles interpretaciones diferentes. Y puesto que los teoremas son consecuencias formales de los axiomas, cualquier interpretación de los símbolos arbitrarios que haga verdaderos los axiomas necesariamente (verificará) hará verdaderos los teoremas. La ventaja adicional de la generalidad es entonces otra ganancia obtenida por el desarrollo formal de los sistemas deductivos. Aclaremos con un ejemplo. Dados algunos conocimientos de astronomía, puede desearse establecer un sistema deductivo para ese tema. Con el fin de evitar los errores que la familiarización con el tema podría inducir en las deducciones de los teoremas a partir de los axiomas elegidos, puede desarrollarse el sistema *formalmente*. En vez de tomar, digamos, "estrellas" y "planetas" entre los términos indefinidos, se pueden tomar "*A*es" y "*B*es". Los axiomas y teoremas contendrán estos símbolos, y cuando se haya desarrollado el sistema, todas sus fórmulas se podrán interpretar tomando el símbolo "*A*" como representante de estrellas y el símbolo "*B*" como representante de planetas. Ahora bien, si los axiomas son *verdaderos* al ser así interpretados, también deben serlo los teoremas, y el sistema formal con esta interpretación va a constituir una ciencia o sistema deductivo de la astronomía. Pero tal vez puedan encontrarse *otras* interpretaciones de los símbolos "*A*" y "*B*" que también hagan verdaderos los axiomas (y luego también los teoremas). Las fórmulas del sistema podrían convertirse en enunciados diferentes, pero tan verdaderos designando con "*A*" los núcleos atómicos y con "*B*", los electrones. Si esto fuera posible (y en cierta etapa de la historia de la física atómica pareció muy plausible), el sistema formal original con esta segunda interpretación constituiría una ciencia o sistema deductivo de la física atómica. Luego, desarrollar formalmente un sistema deductivo, esto es, no interpretando sus términos indefinidos sino hasta después de haber deducido los teoremas, no sólo ayuda a alcanzar el rigor en su desarrollo, sino que logra una mayor generalidad por la posibilidad de encontrar interpretaciones alternativas para el mismo (y otras aplicaciones). Esta clase de ventaja suele darse en las matemáticas puras. Por ejemplo, el mismo sistema deductivo formal se transformará en la teoría de los números reales mediante una interpretación de sus símbolos primitivos, por un lado y en la teoría de los puntos de una línea recta, por el otro. Ese hecho proporciona el fundamento teórico para la rama de las matemáticas que se llama *Geometría Analítica.*

Como aquí se usa, el término sistema *deductivo formal* es simplemente un sistema deductivo, que consiste en axiomas y teoremas, algunos de cuyos términos indefinidos o primitivos son símbolos arbitrarios cuya interpretación es completamente extrasistemática. Además de esos términos indefinidos especiales, y otros que se definen por medio de ellos, las fórmulas (axiomas y teoremas) del sistema sólo contienen términos lógicos tales como "si... entonces...", "y", "o", "no", "todos", "son" y semejantes, y posiblemente (a menos que el sistema se destine a la aritmética) términos aritméticos tales como "suma" y "producto" y símbolos numéricos.

6.4. Atributos de los Sistemas Deductivos Formales

Por lo común, aunque no siempre, se establece un sistema deductivo formal con alguna interpretación particular "en mente". Es decir, que el investigador posee cierto conocimiento de alguna materia, y desea establecer un sistema adecuado para expresarlo. Cuando el sistema formal ha sido construido, naturalmente surge la pregunta de si es adecuado para la formulación de todas las proposiciones que con él se intenta expresar. Si lo es, puede llamársele "expresivamente completo" *con respecto a esa materia.* Estamos discutiendo lo que puede *decirse* en el sistema, *no* lo que puede demostrarse. Con respecto a algún tema dado, un sistema deductivo formal es "expresivamente completo" cuando es posible asignar significados a sus términos indefinidos de modo que toda proposición respecto a esa materia puede *expresarse* como una fórmula del sistema. El que las proposiciones *verdaderas* puedan *demostrarse como teoremas* o no es cuestión que se estudia más adelante.

Un sistema se dice que es *inconsistente* si dos fórmulas, una de las cuales es la negación o contradicción de la otra, pueden ambas demostrarse como teoremas dentro del sistema. Un sistema es *consistente* si no contiene fórmula alguna en que tanto la fórmula como su negación sean demostrables como teoremas, dentro del mismo. Como se vio en el Cap. 3, una contradicción trae consigo cualquier proposición. De manera que una definición deductiva o criterio de consistencia se puede formular como sigue: un sistema es consistente si contiene (es decir, puede expresar) una fórmula no demostrable como teorema dentro del mismo sistema. Esto se conoce como el "criterio de consistencia de Post", que fue enunciado por el matemático y lógico norteamericano E. L. Post. La consistencia es de fundamental importancia. Un sistema deductivo inconsistente no tiene ningún valor, pues todas sus fórmulas son demostrables como teoremas, incluyendo las que son negaciones explícitas de otras. Cuando los términos indefinidos son dotados con significados, estas fórmulas contradictorias se convierten en proposiciones contradictorias y no pueden ser verdaderas. Y como no pueden ser verdaderas, no pueden servir como sistematización del conocimiento —pues el conocimiento sólo se expresa en proposiciones verdaderas.

Si se logra deducir una fórmula tanto como su negación, como teoremas de un sistema, se ha demostrado que el sistema es inconsistente. Pero si se trata, sin éxito, de hacerlo, *no* por eso se ha demostrado la consistencia del sistema, pues el hecho puede haber reflejado, nada más, una falta de ingenio de parte del investigador al construir demostraciones. ¿Cómo puede entonces establecerse la consistencia de un sistema? Un método de demostración de la consistencia de un sistema deductivo formal es encontrar una interpretación del mismo en la que todos sus axiomas y teoremas son proposiciones verdaderas. Como sus teoremas son consecuencias lógicas de sus axiomas, cualquier interpretación que haga verdaderos sus axiomas también hará verdaderos sus teoremas. Así que, para demostrar la consistencia de un sistema es suficiente encontrar una interpretación en la que todos sus axiomas sean verdaderos.

Los axiomas de un sistema deductivo se dice que son *independientes* (o que exhiben *independencia*) si ninguno de ellos puede deducirse como teorema, de los otros. Un sistema deductivo que no es consistente es lógicamente cuestionable y de ningún valor, pero no hay objeción lógica que hacer a un sistema deductivo cuyos axiomas no son independientes. Pero a menudo parece que el hacer más supuestos de los necesarios para el desarrollo de un sistema es extravagante, poco elegante, y debiera evitarse. Cuando no sea necesario suponer una fórmula como axioma, y se le pueda demostrar como un teorema, debiera demostrársele y no suponérsele, por "economía". Un conjunto de axiomas no independientes se denomina "redundante". Un conjunto redundante de axiomas es poco elegante desde el punto de vista estético, pero no es lógicamente "malo".

Si se *puede* deducir uno de los axiomas de un sistema basándose en los axiomas restantes, se ha mostrado que el conjunto de axiomas es redundante. Pero si uno intenta sin éxito deducir cualquiera de los axiomas basándose en los restantes, *no* por eso se habrá mostrado su independencia, pues el no lograr una demostración puede no ser sino consecuencia del poco ingenio del investigador. Para demostrar que algún axioma en particular es independiente de los demás, es suficiente encontrar una interpretación que haga *falso* al axioma en cuestión y *verdaderos* los restantes. Una interpretación tal demostrará que el axioma en cuestión no es deducible, como teorema, de los restantes, porque si lo fuera sería verdadero en cualquier asignación de significados que hiciera verdaderos a los demás. Si para cada axioma es posible encontrar una interpretación tal, esto demostrará que el conjunto de axiomas es independiente.

La noción de *compleción* (o completud) *deductiva* es muy importante. El término "compleción"* se usa en varios sentidos. En el menos preciso de los sentidos podemos decir que un sistema deductivo es completo si todas las fórmulas *deseadas* se pueden demostrar dentro del mismo. Podemos tener un criterio extrasistemático para la verdad de las proposiciones respecto a la materia para la que fue construido el sistema deductivo. Si lo tenemos, entonces podemos llamar completo al sistema cuando todas sus fórmulas que se convierten en proposiciones verdaderas en la interpretación que se propone son fórmulas demostrables o teoremas del sistema. (En cualquier sentido del término, un sistema *inconsistente* será *completo,* pero en vista de que los sistemas inconsistentes no tienen ningún valor nos limitaremos al estudio de los sistemas *consistentes.*)

Hay otro concepto de la propiedad de ser *completo* y que se puede explicar como sigue. Cualquier sistema deductivo formal tendrá cierta colección de términos especiales indefinidos o primitivos. Como cualesquier términos que se pueden definir dentro del sistema son teóricamente eliminables, al ser reemplazables en cualquier fórmula en que aparezcan por la secuencia de los términos indefinidos por medio de la cual se les definió, por el momento ignoraremos los términos definidos. Todas las fórmulas que no contengan términos que no sean estos términos indefinidos especiales (y términos lógicos) se pueden expresar en el sistema. Podemos hablar de la totalidad de los términos indefinidos como la *base* del sistema y las fórmulas expresables en el sistema son las fórmulas construidas sobre *esa base.* En general, la totalidad de las fórmulas construidas sobre la base de un sistema dado se pueden dividir en tres grupos: primero, todas las fórmulas demostrables como teoremas dentro del sistema; segundo, todas las fórmulas cuya negación es demostrable dentro del sistema; y tercero, el de toda fórmula tal que ni ella ni su negación es demostrable dentro del sistema. Para los sistemas *consistentes* los dos primeros grupos son *ajenos entre sí,* es decir, que no tienen fórmulas en común. Todo sistema cuyo tercer grupo esté vacío, sin fórmulas contenidas en él, se dice que es *deductivamente completo.* Otra manera de expresar este sentido de la compleción es decir que toda fórmula del sistema es tal que o ella o su negación son demostrables como teoremas (no ambas).

Otra definición de la "compleción" implicada por la anterior, pero que no le es equivalente, es que un sistema deductivo es completo cuando toda fórmula que se construye sobre su base o es un teorema o entonces al agregarla como axioma se haría el sistema inconsistente.

* Acción y efecto de completar. (N. del T.)

Un ejemplo de un sistema deductivo incompleto sería la geometría euclidiana menos el postulado de las paralelas. Pues el postulado de las paralelas es él mismo una fórmula constructible sobre la base del sistema euclidiano, pero ni este postulado ni su negación son deducibles de los demás postulados. Queda claro que aunque ser completo es un atributo importante de un sistema deductivo, un sistema deductivo incompleto puede ser muy interesante y valioso. Pues al ustudiar el sistema incompleto de la geometría euclidiana sin el postulado de las paralelas, podemos descubrir las propiedades que el espacio posee independientemente de la cuestión de que sea euclidiano o no euclidiano. De manera más prudente y tal vez menos equívoca puede formularse el mismo asunto diciendo que al investigar el sistema incompleto podemos descubrir las *características comunes* a las geometrías euclidiana y no euclidiana. No obstante, para muchos propósitos se prefiere un sistema completo.

6.5. Sistemas Logísticos

El más importante de los atributos de un sistema deductivo es el rigor. Un sistema tiene rigor cuando no se afirma que una fórmula es un teorema si no la implican los axiomas. El rigor es lo que se persigue al tomar símbolos arbitrarios antes que símbolos familiares para representar los términos primitivos o indefinidos, y el desarrollo *formal* tiene el mismo propósito. Si se enlistan con claridad todos los términos indefinidos y se enuncian explícitamente todos los axiomas usados como premisas para los teoremas, se ayudará a especificar con precisión cuáles fórmulas han de tomarse como teoremas y cuáles no. Con el énfasis en el rigor que ha caracterizado al periodo moderno, los matemáticos críticos han visto que no basta con esto. Alcanzar el rigor requiere aún más.

Un sistema es riguroso sólo cuando sus teoremas se han demostrado lógicamente, o reducido lógicamente de los axiomas. Se ha descubierto que por muy claramente que se hayan enunciado los axiomas, un sistema formal carece de rigor si no se especifica también, precisamente, la noción de *demostración o prueba* lógica* o *derivación lógica*. Todos los sistemas deductivos de la clase mencionada, aun los sistemas deductivos formales que contienen términos lógicos además de sus símbolos especiales no interpretados, dependen para su desarrollo de la "lógica ordinaria". *Suponen* la lógica, en el sentido de que sus teoremas se supone que *lógicamente* siguen de sus axiomas. Pero no especifican lo que es esta "lógica". Luego, todos

* "Prueba" y "demostración" no son exactamente sinónimos. En el capítulo siguiente se aclara esto. (N. del T.)

los sistemas deductivos anteriores, para la geometría, la física, la psicología o disciplinas semejantes, contienen supuestos ocultos que no se enuncian explícitamente. Estos supuestos ocultos son las reglas o principios de la lógica a los que se recurre al construir las demostraciones o deducciones de los teoremas. Luego, tales sistemas deductivos no alcanzan el rigor completo, pues no se reconocen todas sus presuposiciones. Por lo tanto, sus desarrollos no son enteramente rigurosos sino más o menos flojos. Surge desde luego la pregunta: ¿cómo puede eliminarse esta falta de rigor y lograr el rigor cabal? La respuesta es bastante obvia. Un sistema deductivo se desarrolla más rigurosamente cuando se especifican no sólo los axiomas supuestos como premisas en la obtención de los teoremas sino también cuáles son los principios de inferencia que se deben usar en las deducciones. Los axiomas se deben complementar con una lista de formas de argumento válido, o principios de la inferencia válida.

Pero las exigencias en rigor y en sistematización no se detienen aquí todavía. El rigor exige que, además de sus propios axiomas especiales, un sistema deductivo debe explícitamente especificar qué formas de inferencia serán aceptadas como válidas. Pero sería asistemático —y tal vez imposible— dar una lista o catálogo de *todas* las reglas de lógica o modos válidos de inferencia requeridos. También debe establecerse un sistema deductivo de lógica. Un sistema deductivo tal tendrá como objeto la deducción misma. Un sistema de esta índole, frecuentemente llamado un *sistema logístico*, debe diferir de las variedades ordinarias, menos formales, en varios aspectos importantes. Como su objeto es la deducción misma, los términos lógicos "si. . . entonces. . .", "y", "o", "no", etc., no pueden aparecer simplemente supuestos sus significados ordinarios. En su lugar debe haber ciertos símbolos no interpretados. Y los principios lógicos o reglas de inferencia que *el sistema* supone para la deducción de teoremas lógicos de axiomas lógicos deben ser en número reducido y explícitamente enunciados.

Otra diferencia fundamental entre los sistemas logísticos y otros sistemas deductivos formales es que en éstos no necesariamente se especifica la noción de una fórmula significativa o "bien formada" mientras que es de absoluta necesidad hacerlo en un sistema logístico. En un sistema deductivo ordinario (no formal), será obvio cuáles de las secuencias de palabras del sistema son proposiciones significativas del idioma ordinario (inglés, español o el que se haya usado para expresar el sistema). En un sistema deductivo formal pero no logístico, es fácil dividir las secuencias de símbolos en las que "tienen sentido" y las que no lo tienen, pues contendrán las palabras lógicas "si. . . entonces. . .", "y", "o", "no". cuya disposición en la secuencia permitirá reconocer si son significativas o no lo son. Un ejemplo aclarará este asunto. En un sistema deductivo formal que contiene "*A*", "*B*" y "*C*" como símbolos no interpretados primitivos, la sucesión de los símbolos "Si cualquier *A* es un *B*, entonces es un C" claramente es una fórmula completa y "significativa" que será posible demostrar como teorema o no. Pero la secuencia "Si cualquier *A* es un *B*" claramente es *incompleta* mientras que la fórmula "Y o o *A B* no no si" es un disparate. Estas se reconocen como "completas" o "bien formadas", como "incompletas" o "mal formadas" por la presencia de *algunos* símbolos cuya significación se subentiende. Sin embargo, en un sistema logístico, *todos* los símbolos son no interpretados: no hay palabras familiares en sus fórmulas (o secuencias de símbolos) que indiquen cuáles son las "bien formadas" y cuáles no. Si los símbolos "*A*", "*B*", "$\sim$" y "$\supset$" son no interpretados, debe haber algún método que distinga entre una fórmula bien formada como "$A \supset \sim B$" y una tal como "$AB \supset \sim$", que no es bien formada. Con nuestro conocimiento de las interpretaciones normales de estos símbolos podemos reconocer la diferencia y clasificarlas correctamente, pero para el desarrollo *riguroso* de nuestro sistema es necesario que podamos hacerlo en abstracción de los significados (pretendidos) de los símbolos involucrados.

Esta cuestión puede expresarse en los siguientes términos. Como se le concibe de ordinario, un sistema deductivo no formal (interpretado, como la geometría euclidiana) es una organización de las proposiciones respecto a alguna materia especificada. Está constituido por proposiciones, y luego es un *lenguaje* en el que se discute el tema de esa materia. Entendiendo el lenguaje nos es posible dividir todas las secuencias de sus palabras en aquellas que son enunciados significativos y las que son disparates. Esta división se efectúa en términos de significados y luego, se hace *no formalmente*. En un sistema logístico la situación es otra, pues antes de hacer la asignación extrasistemática de los significados, o sea, de dar la interpretación, *todas* las secuencias de símbolos están carentes de significado. Pero lo que queremos es una división comparable de todas sus fórmulas en dos grupos y esto antes e independientemente de la interpretación. Cuando se asignan significados a los símbolos primitivos de un sistema logístico, algunas de sus fórmulas expresarán proposiciones, mientras que otras no lo harán. De manera informal podemos caracterizar una fórmula que en la interpretación que se propone se convierte en un enunciado significativo como una "fórmula bien formada" (abreviando como de costumbre "*wff*"). Cualesquier fórmulas que en la interpretación pretendida *no* se convierten en enunciados significativos *no* son fórmulas bien formadas. En un sistema logístico debe haber un criterio *puramente formal* para distinguir las fórmulas bien formadas de las otras. Caracterizar el criterio como "puramente formal" es decir que es *sintáctico* y no *semántico*, concerniente a las características formales y arreglos de los símbolos en abstracción de sus significados. Así, un sistema logístico debe contener sólo símbolos no interpretados, y proporcionar un criterio para dividir las secuencias de estos símbolos en dos grupos, el primero de los cuales va a contener todas las fórmulas bien formadas, y el segundo las restantes. De las fórmulas bien formadas, algunas se denominarán Axiomas (o Postulados) del sistema logístico.

También se desea dividir todas las fórmulas bien formadas que no son axiomas en dos grupos, las que son teoremas y las que no lo son. Las primeras, son las fórmulas deducibles de los axiomas, *dentro del sistema*. Aunque no interpretadas, las fórmulas bien formadas de un sistema logístico constituyen un "lenguaje" en el que las deducciones o demostraciones pueden escribirse. Algunas fórmulas bien formadas se supondrán como postulados, y otras fórmulas bien formadas se derivarán de ellos, como teoremas. Podría proponerse definir un "teorema" como cualquier *wff* que es conclusión de un argumento válido cuyas premisas son axiomas del sistema. Esta definición propuesta de un "teorema" será aceptable sólo si la noción de argumento *válido* en el sistema puede definirse formalmente. Como todas las *wff* del sistema son no interpretadas, la noción ordinaria de validez no puede usarse para caracterizar los argumentos dentro del sistema, porque la noción usual de validez es *semántica*, al considerarse que un argumento es válido si y sólo si la *verdad* de sus premisas implica la *verdad* de su conclusión. En consecuencia, un *criterio* puramente formal o sintáctico de *validez* debe darse para argumentos expresados *dentro del sistema*. Los argumentos "válidos" dentro del sistema pueden tener no solamente postulados o teoremas ya establecidos como premisas y nuevos teoremas como conclusiones, sino que pueden tener cualesquier *wff* como premisas, aun las que no son postulados ni teoremas, y como conclusiones, fórmulas bien formadas que no son teoremas Desde luego, se desea que cualquier argumento dentro del sistema que sea sintácticamente "válido" se convierte en un argumento semánticamente válido en la interpretación que se piensa dar, o interpretación "normal".

Cualquier sistema logístico contendrá entonces los siguientes elementos: (1) una lista de símbolos primitivos que conjuntamente con cualesquier símbolos definidos en términos de ellos son los únicos símbolos que aparecen dentro del sistema; (2) un sistema puramente formal o sintáctico para dividir las secuencias de estos símbolos en fórmulas que son bien formadas (*wff*) y las que no lo son; (3) una lista de *wff* que se suponen como axiomas o postulados; (4) un criterio puramente formal o sintáctico para dividir las secuencias de fórmulas bien formadas en argumentos "válidos" y "no validos"; y (5) basado en (3) y (4), un criterio puramente formal para distinguir entre teoremas y no teoremas del sistema.

Es posible construir distintos sistemas logísticos como teorías sistemáticas de diferentes partes de la lógica. Los sistemas logísticos más sencillos son los que formalizan la lógica de los enunciados compuestos función de verdad. A éstos se les llama *cálculos proposicionales* o, con menos frecuencia, *cálculos sentenciales*. En el capítulo que sigue se presentará y estudiará un cálculo proposicional particular.

7

Un Cálculo Proposicional

7.1. Lenguaje Objeto y Metalenguaje

El sistema logístico por construirse en este capítulo tiene el propósito de ser adecuado a la formulación de argumentos cuya validez depende de las maneras en que los enunciados se componen en enunciados compuestos función de verdad. Nuestro sistema logístico será un *lenguaje*, aunque en atención al rigor se le considerará no interpretado al desarrollar sus teoremas. Vamos a *hablar de* este lenguaje. Será el *objeto* de nuestra discusión y, por tanto, llamado el "lenguaje objeto". Por ser no interpretado, sus símbolos y fórmulas carecen de significación y no podemos *usarlo* hasta darle una interpretación —que se pospone hasta después de su desarrollo—. Debemos, entonces, usar un lenguaje *diferente* para hablar sobre o respecto a nuestro lenguaje objeto. El lenguaje *usado* al hablar de un lenguaje es llamado un "metalenguaje". En cualquier investigación de lenguaje, hay un lenguaje objeto que es el *objeto* de la investigación, y hay un metalenguaje que *usan* los investigadores al hablar respecto al lenguaje objeto.

Un lenguaje objeto puede ser estudiado desde varios puntos de vista. Puede investigarse la relación que guarda con sus usuarios, como se hace en un estudio de los cambios en los dialectos que ocurren en las diferentes partes del país. O se puede investigar el significado o interpretación de un lenguaje, como al recopilar un diccionario, y en esta investigación debe usarse un metalenguaje *semántico*. Finalmente puede procederse a investigar la estructura formal de un lenguaje como en una gramática o al describir el desarrollo de los teoremas en un sistema logístico no interpretado, para lo cual se usa un metalenguaje *sintáctico* o *Lenguaje Sintaxis*. Al estudiar el lenguaje objeto que aquí construiremos, algunas veces usaremos un metalenguaje semántico, y otras un metalenguaje sintáctico. Al estudiar su adecuación para expresar todos los enunciados compuestos función de verdad y su consistencia y completud tendremos que usar un metalenguaje semántico, pues estos asuntos involucran la interpretación que se intenta dar. Pero al describir los criterios puramente formales para sus fórmulas bien formadas y la "validez" sintáctica de sus argumentos, sólo hay necesidad de usar un Lenguaje Sintaxis, pues no se necesita hacer referencia a significados, en relación con esto.

El lenguaje que se usará como metalenguaje al estudiar nuestro sistema logístico será el lenguaje ordinario,* además de la aritmética elemental y algunos dispositivos simbólicos especiales que se presentarán y explicarán cuando sea necesario. Se supone desde luego que el lector entiende el metalenguaje porque todo el estudio tiene lugar dentro del mismo. Sólo este metalenguaje será el utilizado, y en algunas partes de nuestro estudio hará las veces de metalenguaje semántico, en otras las de Lenguaje Sintaxis.

Hay que recalcar que "lenguaje objeto" y "metalenguaje" son *términos relativos*. Cualquier lenguaje, no importa qué tan simple o complejo sea, es un lenguaje objeto cuando se habla *de* él. Y cualquier lenguaje (que debe ser un lenguaje interpretado, significativo) es un metalenguaje cuando se le *usa* en la discusión de un lenguaje objeto. Dado que *nuestro* lenguaje objeto no es interpretado no podemos usarlo como metalenguaje, pero en otro contexto donde el lenguaje objeto es un lenguaje interpretado o significativo, el mismo lenguaje puede ser lenguaje objeto y metalenguaje. Así, en nuestro primer capítulo se estudiaba el lenguaje español (y era por tanto éste el lenguaje objeto) y el estudio se llevaba a cabo en español (lo que lo hacía también el metalenguaje). Un lenguaje suficientemente rico o complejo puede lograr la formulación de toda su sintaxis y una buena parte de su semántica. Pero ningún lenguaje, bajo pena de contradicción, puede expresar la totalidad de su semántica; y desde luego no las condiciones de verdad para la totalidad de sus propios enunciados. Esa limitación es fácil de mostrar.

Que no hay lenguaje que puede exhaustivamente expresar su propia semántica queda demostrado en la versión siguiente de la "paradoja del mentiroso".[1] Considérese el siguiente enunciado español:

La oración impresa en la Pág. 204, renglón 38 de este libro no es verdadera.

---

* Español aquí, inglés en el original. (N. del T.)

[1] Debida a J. Lukasiewicz.

Abreviemos al enunciado anterior con la letra "S". Ahora, tan obvio como que "la nieve es blanca", es verdadero si y sólo si la *nieve es blanca*, así es obvio que

> "S" es verdadera si y sólo si *la oración impresa en la Pág. 204, renglón 38 de este libro no es verdadera.*

Pero contando los renglones y viendo el número de página se verifica que "S" es idéntica a *la oración impresa en la Pág. 204, renglón* 38 *de este libro.* Luego

> "S" es verdadera si y sólo si "S" *no es verdadera.*

que es una contradicción explícita. El que aparezca un resultado contradictorio tal como consecuencia de supuestos aparentemente inocentes no deberá considerarse como broma o sofisticación. Es una cuestión seria que revela que los supuestos no eran tan inocentes como lo parecían. El origen del problema, generalmente se conviene que estriba en el intento de formular las condiciones de verdad para los enunciados de un lenguaje con el mismo lenguaje. Al menos, si distinguimos perfectamente entre lenguaje objeto y metalenguaje, y no tratamos que un lenguaje objeto sirva como su propio metalenguaje semántico, no surge la contradicción. Otro modo de evitar tales contradicciones es el que se estudia en el Apéndice C, al final de este libro.

7.2. Símbolos Primitivos y Fórmulas bien Formadas

Ahora procedemos a la construcción de nuestro sistema logístico. Hay dos clases de símbolos primitivos en nuestro cálculo proposicional: símbolos "proposicionales" y símbolos de "operadores". De estos últimos sólo usamos cuatro, que son

$$\cdot, \sim, (,)$$

Queremos una infinidad de símbolos proposicionales, para lo cual usamos las cuatro primeras letras mayúsculas del alfabeto (en tipo negrilla) con y sin subíndices:

$$\begin{array}{lllll} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{A}_1 & \boldsymbol{A}_2 & \boldsymbol{A}_3 & \cdots \\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{B}_1 & \boldsymbol{B}_2 & \boldsymbol{B}_3 & \cdots \\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{C}_1 & \boldsymbol{C}_2 & \boldsymbol{C}_3 & \cdots \\ \boldsymbol{D} & \boldsymbol{D}_1 & \boldsymbol{D}_2 & \boldsymbol{D}_3 & \cdots \end{array}$$

Estos son los únicos símbolos que contendrá nuestro cálculo proposicional,[2] y al demostrar los teoremas y deducir las conclusiones de las premisas *dentro del sistema* deberán considerarse como completamente no interpretados. Se puede pensar, antes de asignarles significados, que son *marcas* repetibles y reconocibles y no "símbolos" —aunque será conveniente referirse a ellos como "símbolos".

Desde luego, al establecer nuestro sistema logístico nos guiamos por la interpretación que pensamos darle finalmente. Esta interpretación controla nuestra selección de símbolos primitivos, y también gobierna nuestra definición sintáctica de una "fórmula bien formada". Una *fórmula* de nuestro sistema se define como cualquier secuencia finita de símbolos primitivos de nuestro sistema. El conjunto de *todas* las fórmulas de nuestro sistema incluye secuencias tales como:

$$\mathbf{B}_1$$
$$(\mathbf{A})\cdot(\mathbf{A})$$
$$\sim(\mathbf{D})\sim(\sim)$$
$$\sim((\mathbf{A}_1)\cdot(\mathbf{C}_3))$$
$$\mathbf{B}_2\mathbf{B}_3\mathbf{A}_7\sim(\ )(\ )\cdot(\ )$$
$$)))((\ $$
....

Sólo algunas de estas se contarán entre las fórmulas bien formadas, sin embargo. Nuestra definición de "fórmula bien formada" se enunciará, desde luego, en nuestro Lenguaje Sintaxis. Es conveniente introducir algunos símbolos especiales en nuestro Lenguaje Sintaxis, como ayuda en una exposición clara y económica de nuestro sistema logístico. Mientras que las cuatro primeras mayúsculas del alfabeto con y sin subíndices, impresas en tipo negro, son símbolos de nuestro lenguaje objeto, esas mismas letras impresas en tipo itálico claro son símbolos de nuestro metalenguaje. Su significado en este último sigue el convenio de que una letra itálica elemento de nuestro metalenguaje designa o representa esa misma letra impresa en negro, elemento de nuestro lenguaje objeto. Introducimos además las letras mayúsculas "*P*", "*Q*", "*R*", "*S*", . . . , con y sin subíndices, y nos referimos a ellas como "variables proposicionales". Mientras que los símbolos proposicionales en nuestro cálculo proposicional son no interpretados y *no tienen significado,* las variables proposicionales "*P*", "*Q*", "*R*", "*S*", . . . , *en* nuestro Lenguaje Sintaxis *se interpretan* y *tienen significado.* Toda variable proposicional de nuestro Lenguaje Sintaxis, hasta nuevo aviso, denota cualquier fórmula de

---

[2] *Podíamos* haber usado solamente *A* y ′ para dar una base finita del conjunto infinito de símbolos proposicionales escritos como.

$$\mathrm{A},\ \mathrm{A}',\ \mathrm{A}'',\ \mathrm{A}''',\ \mathrm{A}'''',\ \ldots .$$

Y como se mostrará en el Cap. 8, *podríamos* dejar de lado los símbolos "(" y ")" nuestro lenguaje objeto —sujeta a la restricción siguiente—. En cualquier oración o secuencia de oraciones de nuestro Lenguaje Sintaxis, dos variables proposicionales distintas, digamos "P" y "Q" pueden denotar dos fórmulas distintas de nuestro lenguaje objeto, digamos "$\boldsymbol{B}_1$" y "$\sim((\boldsymbol{A}_1)\cdot(\boldsymbol{C}_3))$", o una misma fórmula de nuestro lenguaje objeto. Pero en cualquier contexto, aunque una variable proposicional puede denotar *cualquier* fórmula del lenguaje objeto, debe seguir denotando esa misma fórmula dondequiera que aparezca en ese contexto. Así, las variables proposicionales "P", "Q", "R", "S", . . . , de nuestro metalenguaje pueden sustituirse por *cualquier nombre* en el metalenguaje de *cualquier fórmula* del lenguaje objeto. También introducimos los símbolos "·", "∼", "(", y ")" en el Lenguaje Sintaxis y explicamos sus significados como sigue. Si cualquier variable proposicional, digamos "P" de nuestro Lenguaje Sintaxis denotan en algún contexto alguna fórmula particular de nuestro lenguaje objeto, digamos "$\boldsymbol{A}$", entonces el símbolo "$\sim(P)$" de nuestro Lenguaje Sintáxis denotará en ese contexto la fórmula "$\sim(\boldsymbol{A})$" de nuestro lenguaje objeto. Y cuando dos variables proposicionales cualesquiera "P" y "Q" denoten en algún contexto dos fórmulas de nuestro lenguaje objeto, digamos "$\boldsymbol{A}$" y "$\sim(\boldsymbol{B}_2)$" respectivamente, entonces el símbolo "$(P)\cdot(Q)$" de nuestro Lenguaje Sintaxis en ese contexto denotará la fórmula "$(\boldsymbol{A})\cdot(\sim(\boldsymbol{B}_2))$"de nuestro lenguaje objeto.

No podemos simplemente dar una lista de todas las fórmulas bien formadas de nuestro lenguaje objeto, pues existe una infinidad de ellas. Es necesario dar una definición inductiva o *recursiva* de "fórmula bien formada" que puede enunciarse como sigue, usando los convenios simbólicos explicados en el párrafo precedente.

Definición Recursiva de Fórmula Bien Formada[3]

(a) Todo símbolo proposicional es una *wff*.
(b) Si una fórmula P cualquiera es una *wff*, entonces $\sim(P)$ es una *wff*.
(c) Si cualesquier fórmulas P y Q son ambas *wff*, entonces $(P)\cdot(Q)$ es una *wff*.

(Ninguna fórmula del lenguaje objeto se considerará que es una *wff* a menos que lo sea como consecuencia de estas reglas.)

---

[3] Aquí como en otros lugares, hay ciertas alternativas en el desarrollo de los sistemas logísticos. En vez de la definición recursiva del texto podíamos haber usado la siguiente:

(a) Si P es un símbolo proposicional, entonces (P) es una *wff*.
(b) Si P es una *wff* entonces $(\sim P)$ es una *wff*.
(c) Si P y Q son *wff*, entonces $(P\cdot Q)$ es una *wff*. (Ninguna fórmula es una fórmula bien formada si no se sigue ese hecho de las reglas anteriores.)

Esta definición de *wff* daría otras fórmulas *wff*, pero el sistema logístico resultante se desarrollaría igualmente bien.

Esta definición permite la formación de una infinidad de fórmulas bien formadas, pero a la vez proporciona un criterio *efectivo* para su reconocimiento. No importando qué tan larga sea una secuencia (finita)) de símbolos del lenguaje objeto, nuestra definición recursiva nos permite decidir en un número finito de pasos si es o no es una fórmula bien formada. Tomemos un ejemplo relativamente sencillo para ilustrarlo:

$$\sim((A)\cdot(\sim(B)))$$

Debe decidirse si la anterior es una *wff*, una fórmula bien formada. Por la parte (b) de la definición recursiva, es una *wff* bajo la condición de que $(A)\cdot(\sim(B))$ sea una *wff*. Esta última es una *wff* por la parte (c) de la definición, siempre que A y $\sim(B)$ sean bien formadas. La primera es una *wff* por la parte (a) de la definición, y por la parte (b), la segunda es una *wff* siempre que B sea una *wff*, que lo es por la parte (a) de la definición. Así, la fórmula en cuestión *es* una *wff*. De aquí en adelante, usaremos las variables proposicionales "*P*", "*Q*", "*R*", "*S*", etc., de nuestro Lenguaje Sintaxis, para denotar sólo las fórmulas *bien formadas* de nuestro lenguaje objeto.

EJERCICIOS

Usando la Definición Recursiva para las Fórmulas Bien Formadas, muéstrese cuáles de las siguientes son *wff* de nuestro lenguaje objeto:

1. $(\sim(A_1))\cdot(A_1)$
2. $\sim(\sim((B_1)\cdot(\sim(C_3))))$
3. $\sim(\sim((B_2)\cdot(\sim(D_4)))$
4. $\sim((\sim(D_3))\cdot(\sim(D_4)))$

*5. $(\sim((\sim)\cdot(C_2)))\cdot(\sim((B_3)\cdot(B_3)))$

6. $\sim(((A)\cdot(B))\cdot(\sim(B)))$
7. $\sim((A)\cdot(B))\cdot(\sim((A)\cdot(A))))$
8. $(\sim(\sim(A))\cdot(B)\cdot(C))))\cdot(((\sim(A))\cdot(B))\cdot(\sim(C)))$
9. $\sim((\sim((A)\cdot(\sim(B))))\cdot(\sim((\sim((B)\cdot(C)))\cdot(\sim(\sim((C)\cdot(A)))))))$

*10. $\sim(((\sim((A)\cdot(\sim(B))))\cdot(A))\cdot(\sim(\sim((A)\cdot(\sim(B))))))$

En la interpretación que se piensa dar, o interpretación "normal" de nuestro sistema logístico, sus símbolos proposicionales deben ser traducciones simbólicas de enunciados del español que no contengan otros enunciados como partes componentes de enunciado compuesto de función de verdad. Si *P* es la traducción simbólica de cualquier enunciado del español, $\sim(P)$ es la traducción simbólica de su negación. Por tanto si P y Q son las traducciones simbólicas de dos enunciados cualesquiera del español, $(P)\cdot(Q)$ es la traducción simbólica de su conjunción. Ahora surge la pregunta: ¿Es nuestro sistema logístico adecuado para expresar todos los enunciados compuestos función de verdad, en la interpretación normal? Un sistema adecuado a la expresión de todas las funciones de verdad se dirá que es *"funcionalmente completo"*. Este es un caso especial de la "completud expresiva" mencionada en el Cap. 6.

Iniciamos nuestra exposición mostrando que nuestro sistema logístico (que llamaremos "R.S." puesto que es el Sistema de Rosser[4]) es adecuado para la formulación de algunas funciones de verdad familiares. Las negaciones y las conjunciones se han mencionado ya, pero también hay que considerar las disyunciones, condicionales y equivalencias. Si dos enunciados del español se traducen a P y Q, su disyunción *débil* (que es verdadera si alguno cualquiera o ambos son verdaderos) se expresa en R.S. como $\sim((\sim(P))\cdot(\sim(Q)))$. Tratándose de una función muy frecuente introducimos una abreviación para la misma, en nuestro Lenguaje Sintaxis, definiendo "$P \vee Q$" como notación de las mismas *wff* del lenguaje objeto R.S., que se designan "$\sim((\sim(P))\cdot(\sim(Q)))$".[5] Si dos enunciados del español se traducen a P y Q, su disyunción *fuerte* (que es verdadera si uno cualquiera es verdadero, pero no ambos) se expresa en R.S. como $(\sim((P)\cdot(Q)))\cdot(\sim((\sim(P))\cdot(\sim(Q))))$.

La traducción simbólica de un enunciado condicional de función de verdad del español cuyo antecedente tiene la traducción simbólica P y cuyo consecuente tiene la traducción simbólica Q será $\sim((P)\cdot(\sim(Q)))$. Esta noción también es muy común, así que introducimos el símbolo "$\supset$" en nuestro Lenguaje Sintaxis, usando "$P \supset Q$" para designar idénticamente las fórmulas bien formadas de R.S.

[4] El autor está en deuda con el profesor J. Barkley Rosser de la Cornell University por la autorización para incluir el siguiente material. Los cálculos que aquí presentamos, así como en el Cap. 9, son versiones preliminares de sistemas logísticos que aparecen en forma revisada en *Logic for Mathematicians*, New York, McGraw Hill, 1953, del profesor Rosser.

[5] Puesto que "$P \vee Q$" es una abreviación de "$\sim((\sim(P))\cdot(\sim(Q)))$" es apropiado decir que $P \vee Q$ es, o es idéntica a $\sim((\sim(P))\cdot(\sim(Q)))$, pero *no* que $P \vee Q$ es una abreviación de esta última, ya que en el lenguaje objeto mismo no hay abreviaciones. (El símbolo "v" es un símbolo significativo del Lenguaje Sintaxis, *pero no aparece, siquiera,* en el lenguaje objeto aunque podríamos introducirlo si lo deseáramos.)

Aclaremos mediante una analogía. Como "U.R.S.S." es una abreviación de "Unión de Repúblicas Socialistas Soviéticas", la U.R.S.S. es idéntica a la Unión de Repúblicas Socialistas Soviéticas, pero no es abreviación de nada, tratándose de una extensa nación que cubre un sexto de la superficie terrestre. Como "U.R.S.S." designa una gran nación, la U.R.S.S. *es* una gran nación y no tiene *significado* en sentido literal o semántico alguno. Así también, como en cualquier contexto "$P \vee Q$" designa una *wff* de R.S., en ese contexto $P \vee Q$ es una *wff* de R.S., y como R.S. es no interpretado, sus *wff* no tienen significado y $P \vee Q$ no tiene significado, en particular.

que se designan "$\sim((P)\cdot(\sim(Q)))$". Si dos enunciados del español tienen las traducciones simbólicas P y Q, el enunciado de que son (materialmente) equivalentes, esto es, que tienen los mismos valores de verdad o que cada uno implica (materialmente) el otro, tiene la traducción simbólica $(P \supset Q)\cdot(Q \supset P)$, que es idénticamente la misma *wff* de R.S. que $(\sim((P)\cdot(\sim(Q))))\cdot(\sim((Q)\cdot(\sim(P))))$. Puesto que la equivalencia material es también una noción que se usa con frecuencia, introducimos el símbolo "$\equiv$" en nuestro Lenguaje Sintaxis, definiendo "$P\equiv Q$" como abreviación de "$(P \supset Q)\cdot(Q \supset P)$".

En esta etapa adoptaremos dos convenios de notación en nuestro metalenguaje. En el primero se prescinde del punto (para la conjunción) de modo que $(P)(Q)$ es idénticamente la misma fórmula del lenguaje objeto que $(P)\cdot(Q)$. El otro convenio de notación es el de reemplazar los paréntesis por corchetes o llaves en donde tal reemplazo facilite la lectura.

Aun usando corchetes y llaves, la puntuación excesiva dificulta la lectura, así que se harán dos nuevos convenios que permiten el uso de un mínimo de puntuación. El primero es asignar el siguiente *orden de precedencia* a los símbolos

$$\equiv \; \supset \; \mathrm{v} \; \cdot \; \sim$$

de nuestro Lenguaje Sintaxis. Cada uno de éstos tiene mayor alcance o *mayor precedencia* que cualquiera de los que están a la derecha, en la lista. Lo que aquí se procura hacer lo pueden explicar los siguientes ejemplos. La expresión, de otra manera ambigua, "$\sim PQ$" designa $(\sim(P))\cdot(Q)$ y no $\sim((P)\cdot(Q))$, pues el conector "$\cdot$" (que hemos acordado representar por yuxtaposición) tiene mayor alcance que el operador "$\sim$"; el alcance del conectivo "$\cdot$", por lo convenido se extiende por sobre el alcance del símbolo "$\sim$". La expresión, que de otra manera sería ambigua "$P \mathrm{v} QR$" designa $P \mathrm{v} (Q\cdot R)$ y no $(P \mathrm{v} Q)\cdot R$, porque el conector "v", por convenio, tiene precedencia sobre el conector "$\cdot$", y su alcance se extiende por sobre el último. La expresión, que de otra manera sería ambigua, "$P \supset Q \mathrm{v} RS$" designa $P \supset [Q \mathrm{v} (R\cdot S)]$, porque "$\supset$" tiene precedencia sobre "v" y sobre "$\cdot$", y "v" tiene precedencia sobre "$\cdot$". Y la expresión, ambigua de otra manera, "$P \supset Q \equiv \sim Q \supset \sim P$" designa $[P \supset Q] \equiv [(\sim Q) \supset (\sim P)]$, porque "$\equiv$" tiene precedencia sobre "$\supset$" y "$\sim$"; y "$\supset$" tiene precedencia sobre "$\sim$". Nuestro segundo convenio es el de la *asociación a la izquierda*, que significa que cuando el convenio respecto al *orden de precedencia* no sea suficiente para eliminar la ambigüedad de una expresión sus partes deberán agruparse por paréntesis *a la izquierda*. Esto es, cuando una expresión contenga dos (o más) apariciones del mismo conector, y sus alcances relativos en la expresión no se indican de alguna otra manera, la ocurrencia del conector más a la derecha se tomará como la de alcance mayor (o máximo). Esto también se aclara mejor con uno o dos ejemplos. Como todos sus conectores tienen igual orden de precedencia, la ambigüedad de la expresión "$P \supset Q \supset P \supset P$" no puede resolverse mediante nuestro primer convenio. De acuerdo con el segundo, sin embargo, la interpretamos como designando $[(P \supset Q) \supset P] \supset P$. Una parte, pero no toda la ambigüedad de la expresión "$P \equiv Q \equiv PQ \vee \sim P \sim Q$" se elimina con el convenio relativo al orden de precedencia. Una vez que se recurre a dicho convenio, sabemos que designa, *o bien* $[P \equiv Q] \equiv [(P \cdot Q) \vee (\sim P \cdot \sim Q)]$ *o* $P \equiv \{Q \equiv [(P \cdot Q) \vee (\sim P \cdot \sim Q)]\}$. Decidimos que se significa la primera consultando nuestro segundo convenio, que nos instruye acerca de la asociación a la izquierda.

EJERCICIOS

Escriba las siguientes expresiones del Lenguaje Sintaxis en forma no abreviada, completa, respecto a sus paréntesis:

1. $P \vee \sim P$	6. $P \supset Q \supset P$
2. $\sim \sim P \supset P$	7. $P \supset (P \vee Q)$
3. $PQ \supset P$	8. $(P \supset PQ) \supset (P \supset Q)$
4. $PQ \vee R$	9. $(P \supset Q)(Q \supset R) \supset (P \supset R)$
*5. $P \supset (Q \supset P)$	*10. $P \supset \sim P \equiv \sim P$

Las observaciones precedentes muestran cómo expresar algunas funciones de verdad en R.S. Pero para demostrar que R.S. es *funcionalmente completo*, esto es, adecuado a la expresión de *todas* las posibles funciones de verdad de cualquier número de enunciados, se requiere algo más. Debemos contar en nuestro metalenguaje semántico con un método de expresión de todas las posibles funciones de verdad y entonces demostrar que todas éstas o todas sus instancias de sustitución se pueden expresar en nuestro lenguaje objeto R.S. también, en su interpretación normal o estándar. Un método tal para la expresión de todas las funciones de verdad lo proporcionan las *tablas de verdad* que se introdujeron en el Cap. 2. El método y la notación de las tablas de verdad lo importamos entonces, a nuestro metalenguaje semántico y lo usaremos con toda libertad al estudiar las varias propiedades semánticas que posee R.S. en su interpretación estándar.

Las funciones de verdad pueden ser de uno, dos o cualquier número de argumentos (en el sentido matemático en que un "argumento" es una variable independiente). Así $f(P)$ es una función de verdad de P si y sólo si su verdad o falsedad está completamente determinada por la verdad o falsedad de P. De manera semejante, $f(P,Q)$ es una función de verdad de P y Q si y sólo si su valor de verdad lo determinan por completo los valores de verdad de P y Q.

Hay exactamente cuatro funciones de verdad diferentes de un solo argumento, y éstas pueden expresarse en las siguientes tablas de verdad:

P	$f_1(P)$
T	F
F	T

P	$f_2(P)$
T	T
F	F

P	$f_3(P)$
T	F
F	F

P	$f_4(P)$
T	T
F	T

Las funciones $f_1(P)$, $f_2(P)$, $f_3(P)$ y $f_4(P)$ están completamente definidas por estas cuatro tablas de verdad. Son las *únicas* funciones de verdad de un argumento y se les llama funciones "monádicas" o "unarias".[6] Es fácil ver que se les puede expresar en R.S., en sus interpretaciones normales o propuestas. Primero notamos que las interpretaciones propuestas o normales de $\sim P$ y PQ las dan las tablas de verdad:

P	$\sim P$
T	F
F	T

y

P	Q	PQ
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	F

Para demostrar que R.S. es adecuado a las expresiones de $f_1(P)$, $f_2(P)$, $f_3(P)$ y $f_4(P)$, se formulan en R.S. La función $f_2(P)$ es verdad cuando P es verdadero y falso cuando P es falso y luego en R.S. se expresa como P mismo. La función $f_1(P)$ es falsa cuando P es verdadero y verdadera cuando P es falso, y luego en R.S. Se puede formular como $\sim P$. La función $f_3(P)$ es falsa no importando el valor que tome P y, por lo tanto, se le puede expresar en R.S. como $\sim PP$. La función $f_4(P)$ es verdadera en todos los casos y, por lo tanto, en R.S. se le puede expresar como la negación de $f_3(P)$, es decir, como $\sim(\sim PP)$. Así se ha mostrado que todas las funciones de verdad monádicas se expresan en R.S.

Existen, desde luego, más funciones de verdad de dos argumentos que de un argumento. Se les define por las siguientes tablas de verdad:

P	Q	$f_1(P,Q)$
T	T	F
T	F	T
F	T	T
F	F	T

P	Q	$f_2(P,Q)$
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

P	Q	$f_3(P,Q)$
T	T	T
T	F	T
F	T	F
F	F	T

P	Q	$f_4(P,Q)$
T	T	T
T	F	T
F	T	T
F	F	F

[6] Aquí usamos "función de verdad" en el sentido estricto y propio de una correlación no lingüística entre valores de verdad.

P	Q	$f_5(P,Q)$
T	T	F
T	F	F
F	T	T
F	F	T

P	Q	$f_6(P,Q)$
T	T	F
T	F	T
F	T	F
F	F	T

P	Q	$f_7(P,Q)$
T	T	F
T	F	T
F	T	T
F	F	F

P	Q	$f_8(P,Q)$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	T

P	Q	$f_9(P,Q)$
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	F

P	Q	$f_{10}(P,Q)$
T	T	T
T	F	T
F	T	F
F	F	F

P	Q	$f_{11}(P,Q)$
T	T	F
T	F	F
F	T	F
F	F	T

P	Q	$f_{12}(P,Q)$
T	T	F
T	F	F
F	T	T
F	F	F

P	Q	$f_{13}(P,Q)$
T	T	F
T	F	T
F	T	F
F	F	F

P	Q	$f_{14}(P,Q)$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	F

P	Q	$f_{15}(P,Q)$
T	T	F
T	F	F
F	T	F
F	F	F

P	Q	$f_{16}(P,Q)$
T	T	T
T	F	T
F	T	T
F	F	T

Estas son *todas* las funciones de verdad de dos argumentos, y se les llama funciones "diádicas", o "binarias". Fácilmente se muestra que son expresables en R.S. haciéndolo por medio de los símbolos $\sim$ y $\cdot$: por ejemplo, $f_{14}(P,Q)$ se expresa como PQ, mientras que $f_1(P,Q)$ se expresa como $\sim(PQ)$.

EJERCICIOS

1. Exprese cada una de las funciones de verdad diádicas $f_1(P,Q)$, $^*f_2(P,Q), \ldots,$ $^*f_5(P,Q), \ldots,$ $^*f_{11}(P,Q), \ldots,$ $f_{16}(P,Q)$, como *fórmulas bien formadas* de R.S.

2. Existen 256 funciones de verdad triádicas o ternarias: $f_1(P,Q,R)$, $f_2(P,Q,R), \ldots, f_{256}(P,Q,R)$ cada una de las cuales está completamente determinada (o definida) por una tabla de verdad a ocho renglones. Tome diez de ellas y exprésalas como *fórmulas bien formadas* de R.S.

Para demostrar la completud funcional de R.S. es necesario mostrar que *cualquier* función de verdad de *cualquier* número de variables se puede expresar por medio de $\sim$ y $\cdot$. Toda función de verdad de n variables se expresa por medio de una tabla de verdad que tiene n columnas iniciales y 2^n renglones. Así, toda función de verdad $f(P_1, P_2, \ldots, P_{n-1}, P_n)$ está especificada por completo escribiendo

"**T**" o "**F**" en cada una de las 2^n posiciones de la última columna de la siguiente tabla de verdad:

	P_1	P_2	$\ldots$	P_{n-1}	P_n	$f(P_1, P_2, \ldots, P_{n-1}, P_n)$
Renglón 1:	**T**	**T**	$\ldots$	**T**	**T**	
Renglón 2:	**T**	**T**	$\ldots$	**T**	**F**	
$\ldots$						
Renglón $2^n - 1$:	**F**	**F**	$\ldots$	**F**	**T**	
Renglón 2^n:	**F**	**F**	$\ldots$	**F**	**F**	

La función de verdad $f(P_1, P_2, \Phi \ldots, P_{n-1}, P_n)$ tiene una **F** exactamente en un renglón de su tabla o **F** en más de un renglón de su tabla; o ninguna **F** en ningún renglón de su tabla. En todos los casos, la función de verdad se puede representar por una *wff* de R.S.

CASO 1. $f(P_1, P_2, \ldots, P_{n-1}, P_n)$ tiene una **F** solamente en un renglón de su tabla de verdad. Si esta **F** aparece en el primer renglón, entonces la función está representada en R.S. por la *wff* $\sim(P_1 \cdot P_2 \cdot \ldots \cdot P_{n-1} \cdot P_n)$ que tiene una **F** en el primer renglón de su tabla de verdad y **T** en los otros renglones. Si la **F** aparece en el segundo renglón entonces la función está representada en R.S. por la *wff* $\sim(P_1 \cdot P_2 \cdot \ldots \cdot P_{n-1} \cdot \sim P_n)$. Las 2^n funciones de verdad distintas, de las cuales la i-ésima tiene una **F** en su i-ésimo renglón y **T** en los demás están representadas en R.S. por las 2^n *wff*.

$$
\begin{aligned}
&S_1\colon \sim(P_1 \cdot P_2 \cdot \ldots \cdot P_{n-1} \cdot P_n) \\
&S_2\colon \sim(P_1 \cdot P_2 \cdot \ldots \cdot P_{n-1} \cdot \sim P_n) \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&S_{2^n-1}\colon \sim(\sim P_1 \cdot \sim P_2 \cdot \ldots \cdot \sim P_{n-1} \cdot P_n) \\
&S_{2^n}\colon \sim(\sim P_1 \cdot \sim P_2 \cdot \ldots \cdot \sim P_{n-1} \cdot \sim P_n)
\end{aligned}
$$

CASO 2. $f(P_1, P_2, \ldots, P_{n-1}, P_n)$ tiene **F** en más de un renglón de su tabla de verdad. Si tiene **F** en los k renglones $(1 < k \leq 2^n)$ de posiciones $i_1, i_2, \ldots, i_k$, entonces en R.S. está representada por la *wff* $S_{i_1} \cdot S_{i_2} \cdot \ldots S_{i_k}$.

CASO 3. $f(P_1, P_2, \ldots, P_{n-1}, P_n)$ no tiene **F** en ningún renglón de su tabla. Una función tautológica semejante está representada en R.S. por la *wff* $\sim(\sim P_1 \cdot P_1 \cdot P_2 \cdot \ldots \cdot P_{n-1} \cdot P_n)$.

Los casos precedentes agotan las posibilidades, de modo que hemos mostrado cómo expresar en R.S. cualquier función de verdad de cualquier número de variables. Esto no es un teorema *de* o *en* R.S., sino un teorema *respecto* a R.S., establecido en nuestro metalenguaje semántico. Podemos entonces presentarlo como

METATEOREMA I. *R.S. es funcionalmente completo.*

Una prueba rigurosa de este metateorema requiere el uso de la inducción matemática, que estudiaremos en los siguientes párrafos.

Podíamos haber elegido presentar un sistema logístico diferente de R.S. Además de los paréntesis y los símbolos proposicionales P, Q, *R*, *S*, etc., podíamos haber elegido como operadores primitivos cualquiera de los siguientes pares de símbolos: "$\sim$" y "v", "$\sim$" y "$\supset$", "$\cdot$" y "v", "$\cdot$" y "$\supset$" o "v" y "$\supset$", en lugar de "$\sim$" y "$\cdot$". Resulta instructivo preguntarse si la elección de cualquier otro de estos pares de símbolos daba un sistema funcionalmente completo (en la interpretación normal de los símbolos "$\sim$", "$\cdot$", "v", "$\supset$" que designaremos "$\sim$", "$\cdot$", "v", "$\supset$"). Antes de ocuparnos de estos problemas será conveniente explicar en forma breve las dos clases de inducción matemática que usaremos al establecer resultados respecto a (no *en*) R.S.

Usaremos el término "inducción débil" para referirnos al tipo de inducción matemática más común. El esquema para la inducción débil es

$$\begin{array}{l} f(1) \\ \text{para cualquier } m \text{ arbitrario, si } f(m) \text{ entonces } f(m+1) \\ \hline \text{por lo tanto } f(m) \text{ para todo } m \end{array}$$

Es frecuente usarla al demostrar teoremas del álgebra elemental. Por ejemplo, uno demuestra que la suma de los n primeros enteros impares es igual a n^2 demostrando en primer lugar las dos premisas del esquema anterior y luego sacando la conclusión general indicada. La primera premisa que llamaremos el "caso α" se establece aquí como la ecuación trivial $1 = 1^2$. Entonces la segunda premisa, que llamaremos el "caso β", se establece suponiendo que $f(m)$ es verdadera para un entero arbitrario m y de esta hipótesis derivando la conclusión que $f(m + 1)$ es verdadera. En esta demostración particular, la hipótesis del caso β es

$$1 + 3 + 5 + \cdots + (2m - 1) = m^2$$

La conclusión deseada se obtiene sumando $(2m + 1)$ a ambos lados de la ecuación y haciendo una reagrupación y factorización elemental de los términos:

$$1 + 3 + 5 + \cdots + (2m - 1) + (2m + 1) = m^2 + (2m + 1)$$
$$1 + 3 + 5 + \cdots + (2m - 1) + [2(m + 1) - 1] = (m + 1)^2$$

lo que muestra que para un m arbitrario, si la suma de los m primeros enteros impares es m^2, entonces la suma de los $(m + 1)$ primeros enteros impares es $(m + 1)^2$. Así, hemos establecido el caso β; de éste y el caso α, por ***inducción débil*** obtenemos la conclusión deseada de que para todo m, la suma de los m primeros enteros impares es igual a m^2. La inducción débil puede pensarse como el resumen de una sucesión ilimitada de argumentos de la forma *Modus Ponens*:

$$\begin{array}{l} f(1) \\ \text{si } f(1) \text{ entonces } f(2); \\ \hline \therefore f(2) \end{array} \qquad \begin{array}{l} f(2) \\ f(2) \text{ entonces } f(3);\ \ldots; \\ \hline \therefore f(3) \end{array}$$

$$\begin{array}{l} f(m) \\ \text{si } f(m) \text{ entonces } f(m+1);\ \ldots \\ \hline \therefore f(m+1) \end{array}$$

El término "inducción fuerte" se usará para referirse a la inducción matemática, un tanto menos frecuente, cuyo esquema es

$$\begin{array}{l} f(1) \\ \text{para un } m \text{ arbitrario, si } f(k) \text{ para todo } k < m, \text{ entonces } f(m) \\ \hline \text{por lo tanto } f(m) \text{ para todo } m \end{array}$$

La inducción fuerte puede también pensarse que resume una sucesión ilimitada de argumentos de la forma *Modus Ponens*:

$$\begin{array}{l} f(1) \\ \text{si } f(1) \text{ entonces } f(2); \\ \hline \therefore f(2) \end{array} \qquad \begin{array}{l} f(1) \text{ y } f(2) \\ \text{si } f(1) \text{ y } f(2) \text{ entonces } f(3);\ \ldots; \\ \hline \therefore f(3) \end{array}$$

$$\begin{array}{l} f(1) \text{ y } f(2) \text{ y} \ldots \text{y } f(m-1) \\ \text{si } f(1) \text{ y } f(2) \text{ y} \ldots \text{y } f(m-1), \text{ entonces } f(m);\ \ldots \\ \hline \therefore f(m) \end{array}$$

Para ilustrar el uso de la inducción fuerte, demostraremos que una lógica simbólica basada en los símbolos proposicionales P, Q, R, S, ... y los operadores $\cdot$ y v *no* es funcionalmente completa. Esto lo hacemos demostrando que ninguna fórmula bien formada[7] del sistema que se basa en $\cdot$, v y P, Q, R, S, ... puede expresar una función de verdad que tiene el valor *verdadero* cuando todas sus variables tienen el valor *falso*. En nuestra demostración usamos la inducción fuerte en el número de símbolos de la fórmula bien formada $g(P, Q, R, \ldots)$, ignorando los paréntesis, y contando cada ocurrencia o aparición de P, Q, R, ..., $\cdot$, y v como un símbolo.

CASO α: En el caso en que $g(P, Q, R, \ldots)$ contiene sólo un símbolo, para ser bien formada debe ser P solo, o Q solo, o R solo, ... Si las variables P, Q, R, ... tienen todas el valor *falso*, $g(P, Q, R, \ldots)$ tendrá también el valor *falso*, pues es una de ellas. Así, cualquier

[7] Suponemos una definición recursiva como la dada en la Pág. 207.

fórmula bien formada del sistema estudiado ahora que contenga exactamente un símbolo no puede tener el valor *verdadero* cuando todos sus argumentos tienen el valor *falso*.

CASO β: Aquí suponemos que cualquier fórmula bien formada $g(P, Q, R, \ldots)$ que contiene menos de m símbolos no puede tener el valor *verdadero* cuando todas sus variables tengan el valor *falso*, y demostraremos, con este supuesto, que toda fórmula bien formada que contenga exactamente m símbolos no puede tener el valor *verdadero* cuando todos sus argumentos tienen el valor *falso*. Considerar cualquier fórmula $g(P, Q, R, \ldots)$ que contenga exactamente m símbolos (donde $m > 1$). Para que sea bien formada $g(P, Q, R, \ldots)$ debe ser

$$g_1(P, Q, R, \ldots) \cdot g_2(P, Q, R, \ldots)$$

o

$$g_1(P, Q, R, \ldots) \vee g_2(P, Q, R, \ldots)$$

donde $g_1(P, Q, R, \ldots)$ y $g_2(P, Q, R, \ldots)$ son fórmulas bien formadas que contienen menos de m símbolos. Por el supuesto del caso β cuando $P, Q, R, \ldots$ sean todas *falsas*, tanto $g_1(P, Q, R, \ldots)$ como $g_2(P, Q, R, \ldots)$ tendrán también el valor *falso*. Ahora, dadas dos proposiciones cualesquiera que sean *falsas*, su disyunción así como su conjunción son *falsas*; luego en este caso $g(P, Q, R, \ldots)$ tiene también el valor *falso*. Así se establece el caso β.

Establecidos los casos α y β, por inducción fuerte inferimos que ninguna fórmula bien formada del sistema basado en $\cdot$, v, $P, Q, R, \ldots$ puede expresar una función de verdad que tenga el valor *verdadero* cuando todas sus variables tienen el valor *falso*. Luego, el sistema *no* es funcionalmente completo.

EJERCICIOS

Probar la completud funcional o la incompletud de los sistemas logísticos basados en los símbolos proposicionales $P, Q, R, S, \ldots$, los paréntesis y los operadores:

***1.** v y $\sim$

***2.** $\supset$ y $\cdot$

3. $\supset$ y $\sim$

4. $\supset$ y v

5. $\sim$ y $+$, donde $+$ es el símbolo de la disyunción exclusiva, definido por la tabla de verdad para f_7, de la Pág. 213.

***6.** $\supset$ y $+$

7. v y $+$

8. $+$ y $\equiv$

9. $+$ y $\cdot$

10. $\equiv$ y $\sim$

11. $\equiv$ y $\supset$

12. $\supset$ y $\not\supset$, donde $\not\supset$ es el símbolo de la no implicación (material)[8] definido por la tabla de verdad para f_{13} en la Pág. 213.
13. $\supset$ y $\not\subset$, donde $\not\subset$ es el símbolo de la no implicación recíproca, definida por la tabla de verdad para f_{12} de la Pág. 213.
14. $\not\supset$ y $\not\subset$.
15. ¿Cuáles, si se da el caso, de los dieciséis operadores funcionales binarios, f_1, f_2, ..., f_{16} definidos en las Págs. 212 y 213, pueden agregarse a los símbolos proposicionales P, Q, R, S, ... y los paréntesis, para dar un sistema logístico completo con un solo símbolo de operador?

7.3. Axiomas y Demostraciones

Las reglas de nuestro sistema y las demostraciones de los teoremas dentro del mismo se simplificarán mucho si se supone una infinidad de fórmulas bien formadas como axiomas o postulados. Desde luego, no podemos escribir una lista infinita de axiomas *dentro de nuestro lenguaje objeto*, pero podemos usar nuestro Lenguaje Sintaxis para especificar exactamente cuáles de las *wff* de R.S. son axiomas y cuáles no lo son. No puede objetarse una lista infinita de axiomas si hay un proceso *efectivo* para determinar si cualquier *wff* dada es un axioma. La lista infinita de axiomas de R.S. puede escribirse como

Axioma 1. $P \supset (P \cdot P)$
Axioma 2. $(P \cdot Q) \supset P$
Axioma 3. $(P \supset Q) \supset [\sim(Q \cdot R) \supset \sim(R \cdot P)]$

Cada una de estas fórmulas sintácticas (fórmulas dentro de nuestro Lenguaje Sintaxis) representa o designa una lista infinita de fórmulas bien formadas de R.S. Así, el Axioma 1 designa todas las siguientes:

$$\begin{array}{l}
\sim((A)\cdot(\sim((A)\cdot(A)))) \\
\sim((B)\cdot(\sim((B)\cdot(B)))) \\
\sim((C)\cdot(\sim((C)\cdot(C)))) \\
\sim((D)\cdot(\sim((D)\cdot(D)))) \\
\sim((A_1)\cdot(\sim((A_1)\cdot(A_1)))) \\
\dots\dots\dots\dots \\
\sim((\sim(A))\cdot(\sim((\sim(A))\cdot(\sim(A))))) \\
\sim((\sim(B))\cdot(\sim((\sim(B))\cdot(\sim(B))))) \\
\dots\dots\dots\dots \\
\sim(((A)\cdot(D))\cdot(\sim(((A)\cdot(D))\cdot((A)\cdot(D))))) \\
\sim(((A_3)\cdot(B_7))\cdot(\sim(((A_3)\cdot(B_7))\cdot((A_3)\cdot(B_7))))) \\
\dots\dots\dots\dots \\
\dots\dots\dots\dots
\end{array}$$

[8] Así denominada por Alonzo Church en *Introduction to Mathematical Logic*, Vol. I, Princeton, 1956, Pág. 37.

y una infinidad más de *wff* de R.S. De hecho, designa toda *wff* de R.S. que tenga el patrón indicado; y es decidible de modo efectivo, respecto a cualquier secuencia finita de símbolos de R.S., el que sea de este patrón o no lo sea. Se dan tres patrones, y toda *wff* de R.S. que sea un caso o ejemplo de alguno de estos patrones, se supone como axioma.

Estos axiomas son hipótesis razonables como lo pone en evidencia el hecho de que en la interpretación normal de los símbolos $\sim$ y $\cdot$ todos son tautologías.

Lo que se busca es que la interpretación de nuestro sistema logístico sea adecuada a la formulación de argumentos. Los argumentos, como ya se sabe, consisten en premisas y conclusiones, todas ellas expresadas en enunciados. Correspondientes a estos argumentos tenemos, en nuestro sistema logístico, las secuencias de fórmulas bien formadas de las cuales la última es la "conclusión". Se desea establecer un criterio que nos permita distinguir de manera formal entre dos clases de secuencias de *wff* en el sistema R.S.: las que se convierten en argumentos válidos cuando se les interpreta normalmente y las que no lo hacen.

En el Cap. 3 se caracterizó un argumento válido como uno para el que podía darse una demostración formal. Una demostración formal de la validez de un argumento se definía como una secuencia de enunciados, cada uno de los cuales era o una premisa o se infería de los enunciados precedentes por un argumento válido elemental, y cuyo último enunciado era la conclusión del argumento que se demostraba válido. Así, la cuestión de la validez de *cualquier* argumento se "reducía" al problema de la validez de ciertas formas de argumento elementales o reglas de inferencia. Algo por el estilo se propondrá respecto a R.S., pero no es deseable hacer hipótesis al por mayor respecto a las inferencias elementales válidas, como en el Cap. 3, en donde se postularon diecinueve reglas de inferencia, además de las reglas de Demostración Condicional y Demostración Indirecta. Sin embargo, *alguna* regla de inferencia deberá ser supuesta en nuestro sistema logístico, o no habrá inferencias legítimas en el mismo. Una regla de inferencia será suficiente para hacer válidos todos los argumentos y (por lo tanto) para la demostración de todos los teoremas, dentro del sistema R.S. Suponemos *Modus Ponens* y lo enunciamos (en nuestro Lenguaje Sintaxis, claro está), como

REGLA 1. De P y $P \supset Q$ inferir Q.

Ejemplos de argumentos *en* R.S. que el supuesto de esta regla de inferencia hace *válidos* son

$$\begin{array}{lcl} \sim((A)\cdot(\sim(B))) & & \sim(((A_1)\cdot(A_2))\cdot(\sim(\sim(C)))) \\ A & \text{y} & (A_1)\cdot(A_2) \\ B & & \sim(C) \end{array}$$

El supuesto de *Modus Ponens* como Regla 1 (abreviada R 1) de nuestro sistema logístico, *por sí mismo*, permite sólo una clase especial de argumentos con dos premisas para ser considerados válidos. Pero R.S. es adecuado a la expresión de *todos* los argumentos formalmente válidos que se pueden certificar por medio de tablas de verdad, incluyendo los argumentos extendidos que contienen cualquier número de premisas. Así, es deseable introducir un método que dé validez a los argumentos extendidos en R.S. mostrando cómo sus conclusiones se siguen de sus premisas por aplicaciones *reiteradas* de R 1. Nuestro tratamiento es aquí, a grandes rasgos, análogo al que se da para los argumentos extendidos presentado en el Cap. 3, aunque con ciertas diferencias importantes. Definimos una *demostración* de la validez de un argumento que tiene como premisas las fórmulas P_1, P_2, . . ., P_n y como conclusión la fórmula Q, como una secuencia de fórmulas bien formadas S_1, S_2, . . ., S_k tal que: cada S_i es o una de las premisas P_1, P_2, . . . , P_n, o uno de los axiomas de R.S. o se sigue de dos *S* precedentes por R 1; y tal que S_k es Q. Como antes, un argumento se considerará válido si y sólo si existe una *demostración* de su validez. Se introduce una notación especial (en el Lenguaje Sintaxis) para representar esta idea. Introducimos el símbolo especial "$\vdash$" (que puede leerse "da") de modo que

$$P_1, P_2, \ldots, P_n \vdash Q$$

asegura que existe una demostración de la validez del argumento que tiene P_1, P_2, . . . , P_n, como premisas y Q como conclusión. Por ejemplo, todos los argumentos, infinitos en número, designados por

$$\begin{array}{l} P \supset Q \\ \sim(QR) \\ \sim(RP) \end{array}$$

son válidos porque $P \supset Q$, $\sim(QR) \vdash \sim(RP)$, y la demostración consiste en la siguiente sucesión de *S* (eses):

$$\begin{array}{l} S_1\text{: } (P \supset Q) \supset [\sim(QR) \supset \sim(RP)] \\ S_2\text{: } P \supset Q \\ S_3\text{: } \sim(QR) \supset \sim(RP) \\ S_4\text{: } \sim(QR) \\ S_5\text{: } \sim(RP) \end{array}$$

en donde S_1 es el Axioma 3, S_2 es la primera premisa del argumento, S_3 se sigue de S_1 y S_2 por R 1, S_4 es la segunda premisa, S_5 se sigue de S_3 y S_4 por R 1, y S_5 es la conclusión. Cualquier secuencia semejante de S (eses) será llamada una *demostración* de que P_1, P_2, $\ldots$, $P_n \vdash Q$ y cada S_i se llamará un *renglón* de la demostración. Cuando se da una demostración de la validez de todos los argumentos en R.S. en cierta forma, como en el ejemplo mencionado, todo argumento particular de esa forma puede considerarse como convalidado por esa demostración, y la forma general puede considerarse como una *regla de inferencia derivada.*

La definición de *demostración* que se acaba de dar debiera haber aclarado que los axiomas de R.S. funcionan como premisas "subentendidas" de todo argumento formulado dentro del sistema. Cuando dichos axiomas son las *únicas* premisas del argumento, la conclusión es un *teorema* del sistema. El que una fórmula dada Q sea un teorema se expresa escribiendo "$\vdash Q$". La notación "$\vdash Q$" se define más estrictamente como afirmando que existe una demostración de Q, que es una secuencia de fórmulas bien formadas S_1, S_2, $\ldots$, S_k, tal que: cada S_i es o un axioma de R.S. o se sigue de dos S (eses) precedentes por R 1, y S_k es Q.

Debiera observarse que la *demostración*, ya sea de un teorema o de la validez de un argumento, es una noción *efectiva.* Dada cualquier secuencia de S, no importa qué tan larga sea, puede decidirse de manera mecánica, en un número finito de operaciones, si es o no es una *demostración.* Se puede decidir efectivamente de cualquier S si es o no es un axioma (y si es o no es una de las premisas, en caso de haber un argumento involucrado). Y si algún S, digamos S_j, no es ni un axioma ni una premisa, entonces, como sólo un número finito de S preceden S_j en la sucesión, después de un número finito de inspecciones se sabrá si dos de los renglones precedentes son S_i y $S_i \supset S_j$, pues sólo si éstos ocurren en la sucesión, anteriormente, será S_j una consecuencia de dos renglones precedentes, por R 1.

Con esta definición de *teorema,* los tres axiomas y la regla (única) de R.S. pueden considerarse como una especie de máquina simbóliea para generar fórmulas bien formadas. Cada axioma, por sí mismo, genera un número infinito de *wff* y por aplicaciones reiteradas de R 1 a las mismas se produce una infinidad más de *wff* como teoremas. Es natural preguntarse ahora. En primer lugar, ¿es consistente el sistema?, y en segundo lugar, ¿son todos los teoremas, tautologías (en la interpretación normal de los símbolos primitivos)?

Un sistema logístico que es un cálculo proposicional (como lo es R.S.) se llamará *analítico* si y solo si todos sus teoremas se convierten en tautologías en sus interpretaciones normales. R.S. es analítico en esta definición, a condición de que $\vdash P$ implique que P es una tautología. Ahora demostraremos que R.S. es analítico.

METATEOREMA II. *R.S. es analítico (esto es, si* $\vdash P$*, entonces* P *es una tautología).*

Demostración: Usamos inducción fuerte sobre el número de aplicaciones (o usos) de R 1 en la demostración de que $\vdash P$.

CASO α: Supóngase que P resulta de un solo uso de R 1. Entonces R 1 debe ser aplicado a los axiomas. Los axiomas son tautologías, como fácilmente se verifica construyendo tablas de verdad para ellos. Luego P resulta de aplicar R 1 a S y $S \supset P$, donde S y $S \supset P$, ambas, son tautologías. Claramente P debe ser una tautología en este caso, porque si no lo fuera, habría un **F** cuando menos en un renglón de su tabla de verdad, digamos el renglón j. Pero como S es una tautología, tiene sólo el valor **T** en las posiciones de su tabla de verdad incluyendo, desde luego, una **T** en el renglón j. Luego en el renglón j-ésimo, S tendría una **T** y P una **F**, de modo que $S \supset P$ tendría una **F**, contraponiéndose a que es tautológica y sólo tiene valores **T** en su tabla de verdad. Así, el metateorema es verdadero para m usos de R 1 donde $m = 1$.

CASO β: Aquí suponemos que el Metateorema es verdadero para cualquier número $k < m$ de usos de R 1. Considerar cualquier P que tenga una demostración que involucra m usos de R 1. La fórmula P es o un axioma (en este caso, claramente una tautología) o debe resultar de renglones precedentes S y $S \supset P$ usando R 1 m veces. El renglón anterior S o es un axioma (en cuyo caso es claramente una tautología) o se obtiene por $k < m$ usos de R 1, y luego es una tautología por la hipótesis del caso β. De manera semejante, el renglón anterior $S \supset P$ también debe ser una tautología. Ahora, como S y $S \supset P$ son tautologías, P también debe serlo, por el argumento del caso α.

De α y β, por inducción fuerte concluimos que si $\vdash P$ (por *cualquier* número de aplicaciones de R 1) entonces P es una tautología, lo que significa que R.S. es analítico.

Establecida la analiticidad de R.S., su consistencia se obtiene de inmediato y se le puede considerar meramente un corolario del Metateorema II. Al demostrarlo, usamos el criterio Post para consistencia, según el cual un sistema deductivo es consistente si contiene en él mismo una fórmula que no es demostrable como teorema.

COROLARIO: *R.S. es consistente.*

Prueba: La fórmula $P \cdot \sim P$ es una *wff* de R.S., pero no es una tautología, así que por el Metateorema II no es un teorema de R.S. Luego R.S. contiene una fórmula que no es demostrable como un teorema, por tanto, R.S. es consistente por el criterio de Post.

Definimos la "completud deductiva" de un sistema logístico para el cálculo proposicional como la propiedad recíproca de la analiticidad. Un sistema *analítico* es aquél cuyos teoremas son todos tautologías; un cálculo proposicional se llamará *deductivamente completo* en el caso en que todas las tautologías sean demostrables como teoremas dentro del mismo. La completud deductiva de R.S. es más difícil de establecer que los dos primeros Metateoremas y requiere que primero desarrollemos algunos teoremas del sistema. La demostración, entonces, se pospondrá hasta la Sec. 7.6, posterior al desarrollo de R.S. mismo en la Sec. 7.5, después de demostrar la independencia de los axiomas de R.S. en la siguiente sección.

7.4. Independencia de los Axiomas

Se dice que un conjunto de axiomas es independiente si cada uno de ellos es independiente de los demás, esto es, si ninguno de ellos puede derivarse como teorema de los restantes. Para demostrar la independencia de cada axioma es suficiente encontrar una característica de las *wff* del sistema tal que:

1. el axioma que se va a probar como independiente carece de la característica,
2. todos los otros axiomas tienen la característica, y
3. la característica en cuestión es hereditaria con respecto a las reglas de inferencia del sistema.

El sentido de "hereditario" que aquí usamos es más o menos el que se explicó en la Sec. 3.4: una característica es *hereditaria con respecto a un conjunto de reglas de inferencia* si y sólo si siempre que pertenece a una o más fórmulas también pertenece a toda fórmula deducida de ellas por medio de esas reglas de inferencia. La característica de ser una tautología, en la interpretación que se piensa dar o normal, es hereditaria en ese sentido, pero no se la puede usar para demostrar la independencia de cualquier axioma porque *todos* los axiomas de R.S. tienen esta característica.

Para demostrar la independencia de los axiomas de R.S. debemos usar un modelo que contenga más de dos elementos, semejante al que se usó en la Sec. 3.4 para demostrar la incompletud de las diecinueve Reglas de Inferencia originales. Para R.S. será suficiente un modelo de tres elementos, pero para otros sistemas axiomáticos de función de verdad pueden requerirse modelos de *más* de tres elementos.

Para demostrar la independencia del Axioma 1 de R.S. se introduce un modelo de tres elementos en términos del cual pueden interpretarse los símbolos y las fórmulas bien formadas de R.S. Los tres elementos son los "valores" **0**, **1** y **2** que desempeñan papeles semejantes a los de los valores de verdad **T** y **F**. Cada símbolo proposicional tiene asignado uno de estos tres valores. Toda *wff* que no sea un símbolo proposicional tendrá uno de los tres valores **0**, **1**, **2** de acuerdo con las tablas siguientes:

P	$\sim P$
0	**2**
1	**1**
2	**0**

P	Q	$P \cdot Q$
0	**0**	**0**
0	**1**	**1**
0	**2**	**2**
1	**0**	**1**
1	**1**	**2**
1	**2**	**2**
2	**0**	**2**
2	**1**	**2**
2	**2**	**2**

El símbolo definido "$\supset$", cuya definición está dada por

$$P \supset Q = \text{df} \sim(P \cdot \sim Q)$$

tiene como consecuencia de esa definición, la tabla

P	Q	$P \supset Q$
0	**0**	**0**
0	**1**	**1**
0	**2**	**2**
1	**0**	**0**
1	**1**	**0**
1	**2**	**1**
2	**0**	**0**
2	**1**	**0**
2	**2**	**0**

La característica de las fórmulas bien formadas que aquí utilizamos es la de tener el valor **0** independientemente de los valores que se asignen a sus símbolos proposicionales componentes. Es fácil ver que esta característica pertenece al Axioma 2 y al Axioma 3 de R.S. por las siguientes tablas (análogas a las explicadas en la Pág. 28).

$(P$	$\cdot$	$Q)$	$\supset$	P
0	0	0	0	0
0	1	1	0	0
0	2	2	0	0
1	1	0	0	1
1	2	1	0	1
1	2	2	0	1
2	2	0	0	2
2	2	1	0	2
2	2	2	0	2

$(P$	$\supset$	$Q)$	$\supset$	$[\sim$	$(Q$	$\cdot$	$R)$	$\supset$	$\sim$	$(R$	$\cdot$	$P)]$
0	0	0	0	2	0	0	0	0	2	0	0	0
0	0	0	0	1	0	1	1	0	1	1	1	0
0	0	0	0	0	0	2	2	0	0	2	2	0
0	1	1	0	1	1	1	0	1	2	0	0	0
0	1	1	0	0	1	2	1	1	1	1	1	0
0	1	1	0	0	1	2	2	0	0	2	2	0
0	2	2	0	0	2	2	0	2	2	0	0	0
0	2	2	0	0	2	2	1	1	1	1	1	0
0	2	2	0	0	2	2	2	0	0	2	2	0
1	0	0	0	2	0	0	0	0	1	0	1	1
1	0	0	0	1	0	1	1	0	0	1	2	1
1	0	0	0	0	0	2	2	0	0	2	2	1
1	0	1	0	1	1	1	0	0	1	0	1	1
1	0	1	0	0	1	2	1	0	0	1	2	1
1	0	1	0	0	1	2	2	0	0	2	2	1
1	1	2	0	0	2	2	0	1	1	0	1	1
1	1	2	0	0	2	2	1	0	0	1	2	1
1	1	2	0	0	2	2	2	0	0	2	2	1
2	0	0	0	2	0	0	0	0	0	0	2	2
2	0	0	0	1	0	1	1	0	0	1	2	2
2	0	0	0	0	0	2	2	0	0	2	2	2
2	0	1	0	1	1	1	0	0	0	0	2	2
2	0	1	0	0	1	2	1	0	0	1	2	2
2	0	1	0	0	1	2	2	0	0	2	2	2
2	0	2	0	0	2	2	0	0	0	0	2	2
2	0	2	0	0	2	2	1	0	0	1	2	2
2	0	2	0	0	2	2	2	0	0	2	2	2

La característica fácilmente se ve que es hereditaria con respecto a R 1 de R.S. consultando la tabla dada para "$\supset$". En el único renglón en que tanto P como $P \supset Q$ tienen el valor **0**, Q también tiene el valor **0**. Por lo tanto, si la característica pertenece a una o más *wff* también pertenece a todas las *wff* que se deducen mediante R 1.

Finalmente, es fácil ver que la característica en cuestión *no* pertenece al Axioma 1. Cuando P tiene asignado el valor **1**, $P \supset (P \cdot P)$ tiene el valor **1** y no el valor **0** dado que $\mathbf{1} \supset (\mathbf{1} \cdot \mathbf{1})$ es $\mathbf{1} \supset \mathbf{2}$, que es **1**. Luego el Axioma 1 es independiente.

Al tratar de demostrar la independencia de un axioma en un cálculo proposicional naturalmente surgen tres preguntas. Primera, ¿cómo decidir qué tan grande debe ser el modelo usado? Segunda, ¿cómo decidir qué valores (elementos del modelo) asignar al hacer una tabla para los símbolos primitivos del sistema? Tercera, ¿cómo decidir qué elemento (o elementos) del modelo designar como característica hereditaria? No existe una respuesta efectiva o mecánica para estas preguntas. La metodología es todavía aquí cuestión de prueba y error. Por sencillez y economía debiera tratarse de usar un modelo de tres elementos. Si funciona, tanto mejor. Si no es así, hacer la prueba con un modelo de cuatro elementos, etc. Las respuestas a las preguntas segunda y tercera están interrelacionadas. Para probar la independencia del Axioma 1 se quería que tomara un valor no designado en al menos un caso en que los otros axiomas sólo toman el valor designado (o los valores designados) en todos los casos, y el valor designado es hereditario con respecto a R 1. Esta necesidad nos conduce a asignar, cuando menos en un caso, un valor diferente para $P \cdot P$ del designado para P (asignando un valor diferente (**2**) a $P \cdot Q$ para al menos un caso en el que P y Q toman simultáneamente el mismo valor (**1**)). Entonces, para que el Axioma 1, a saber, $P \supset (P \cdot P)$ tome un valor no designado en al menos un caso, especificamos que el condicional con (valor) antecedente **1** y (valor) consecuente **2** tome un valor no designado, en este caso **1**. Para mostrar la independencia del Axioma 2, a saber, $(P \cdot Q) \supset P$, esto es, para hacer que tome un valor no designado en al menos un caso, hacemos que su antecedente $P \cdot Q$ tome un valor designado en cuando menos un caso en el que su consecuente P tome un valor no designado. Es posible hacer varias asignaciones tales, desde luego, pero cualquiera que se elija debe ser consistente con las otras restricciones para lograr que los otros axiomas tomen solamente valores designados y hacer el valor designado hereditario con respecto a R 1.

Para probar la independencia del Axioma 2 de R.S. usamos el mismo modelo de tres elementos y la misma tabla para "$\sim P$". La diferencia está en la tabla de "$P \cdot Q$" siguiente, junto con la tabla que se deriva para "$P \supset Q$".

P	Q	$P \cdot Q$	$P \supset Q$
0	**0**	**0**	**0**
0	**1**	**0**	**2**
0	**2**	**2**	**2**
1	**0**	**0**	**0**
1	**1**	**0**	**2**
1	**2**	**2**	**2**
2	**0**	**2**	**0**
2	**1**	**2**	**0**
2	**2**	**2**	**0**

La característica de las *wff* que aquí utilizamos es nuevamente la de tener el valor **0** independientemente de los valores asignados a sus símbolos proposicionales componentes. Esta característica es fácil ver que pertenece al Axioma 1 y al Axioma 3 de R.S. examinando las siguientes tablas.

P	$\supset$	$(P$	$\cdot$	$P)$
0	**0**	**0**	**0**	**0**
1	**0**	**1**	**0**	**1**
2	**0**	**2**	**2**	**2**

$(P$	$\supset$	$Q)$	$\supset$	$[\sim$	$(Q$	$\cdot$	$R)$	$\supset$	$\sim$	$(R$	$\cdot$	$P)]$
0	**0**	**0**	**0**	**2**	**0**	**0**	**0**	**0**	**2**	**0**	**0**	**0**
0	**0**	**0**	**0**	**2**	**0**	**0**	**1**	**0**	**2**	**1**	**0**	**0**
0	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**2**	**2**	**0**	**0**	**2**	**2**	**0**
0	**2**	**1**	**0**	**2**	**1**	**0**	**0**	**0**	**2**	**0**	**0**	**0**
0	**2**	**1**	**0**	**2**	**1**	**0**	**1**	**0**	**2**	**1**	**0**	**0**
0	**2**	**1**	**0**	**0**	**1**	**2**	**2**	**0**	**0**	**2**	**2**	**0**
0	**2**	**2**	**0**	**0**	**2**	**2**	**0**	**2**	**2**	**0**	**0**	**0**
0	**2**	**2**	**0**	**0**	**2**	**2**	**1**	**2**	**2**	**1**	**0**	**0**
0	**2**	**2**	**0**	**0**	**2**	**2**	**2**	**0**	**0**	**2**	**2**	**0**
1	**0**	**0**	**0**	**2**	**0**	**0**	**0**	**0**	**2**	**0**	**0**	**1**
1	**0**	**0**	**0**	**2**	**0**	**0**	**1**	**0**	**2**	**1**	**0**	**1**
1	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**2**	**2**	**0**	**0**	**2**	**2**	**1**
1	**2**	**1**	**0**	**2**	**1**	**0**	**0**	**0**	**2**	**0**	**0**	**1**
1	**2**	**1**	**0**	**2**	**1**	**0**	**1**	**0**	**2**	**1**	**0**	**1**
1	**2**	**1**	**0**	**0**	**1**	**2**	**2**	**0**	**0**	**2**	**2**	**1**

1	2	2	0	0	2	2	0	2	2	0	0	1
1	2	2	0	0	2	2	1	2	2	1	0	1
1	2	2	0	0	2	2	2	0	0	2	2	1
2	0	0	0	2	0	0	0	0	0	0	2	2
2	0	0	0	2	0	0	1	0	0	1	2	2
2	0	0	0	0	0	2	2	0	0	2	2	2
2	0	1	0	2	1	0	0	0	0	0	2	2
2	0	1	0	2	1	0	1	0	0	1	2	2
2	0	1	0	0	1	2	2	0	0	2	2	2
2	0	2	0	0	2	2	0	0	0	0	2	2
2	0	2	0	0	2	2	1	0	0	1	2	2
2	0	2	0	0	2	2	2	0	0	2	2	2

Fácilmente se comprueba que la característica es hereditaria con respecto a R 1 de R.S. consultando la tabla correspondiente a "$\supset$". En el único renglón en el que tanto P como $P \supset Q$ tienen el valor **0**, Q tiene también el valor **0**. Por lo tanto, si la característica pertenece a una o más *wff* también pertenece a todas las *wff* deducidas de ellas mediante R 1.

Finalmente, con rapidez se comprueba que la característica en cuestión no pertenece al Axioma 2. Cuando tanto P como Q tienen asignado el valor **1** $(P \cdot Q) \supset P$ tiene el valor **2** y no el valor **0** pues $(\mathbf{1} \cdot \mathbf{1}) \supset \mathbf{1}$ es $\mathbf{0} \supset \mathbf{1}$ que es **2**. Luego, el Axioma 2 es independiente.

Para demostrar la independencia del Axioma 3 de R.S. usamos el mismo modelo de tres elementos y la misma tabla para "$\sim P$". La diferencia estriba en la tabla para "$P \cdot Q$" siguiente junto con la tabla derivada para "$P \supset Q$".

P	Q	$P \cdot Q$	$P \supset Q$
0	0	0	0
0	1	1	1
0	2	2	2
1	0	2	0
1	1	2	0
1	2	2	0
2	0	2	0
2	1	2	0
2	2	2	0

La característica de las fórmulas bien formadas que aquí utilizamos es (nuevamente) la de tener el valor **0** independientemente de los valores que se asignen a sus símbolos proposicionales componentes. Esta característica es fácil ver que pertenece al Axioma 1 y al Axioma 2 de R.S. por inspección de las tablas siguientes.

P	$\supset$	$(P$	$\cdot$	$P)$
0	0	0	0	0
1	0	1	2	1
2	0	2	2	2

$(P$	$\cdot$	$Q)$	$\supset$	P
0	0	0	0	0
0	1	1	0	0
0	2	2	0	0
1	2	0	0	1
1	2	1	0	1
1	2	2	0	1
2	2	0	0	2
2	2	1	0	2
2	2	2	0	2

La característica fácilmente se comprueba que es hereditaria con respecto a R 1 de R.S. consultando la tabla de "$\supset$". El renglón, único, en donde P y $P \supset Q$ tienen el valor **0** tiene la propiedad que ahí Q también tiene el valor **0**. Por tanto, si la característica pertenece a una o más *wff*, también pertenece a todas las *wff* que se deducen de ellas mediante R 1.

Finalmente, es fácil ver que la característica en cuestión *no* pertenece al Axioma 3. Cuando P y Q tienen ambos asignados el valor **1** y R asignado el valor **0** $(P \supset Q) \supset [\sim(Q \cdot R) \supset \sim(R \cdot P)]$ tiene el valor **1**, no el valor **0**, dado que $(\mathbf{1} \supset \mathbf{1}) \supset [\sim(\mathbf{1} \cdot \mathbf{0}) \supset \sim(\mathbf{0} \cdot \mathbf{1})]$, sucesivamente se reduce a $\mathbf{0} \supset [\sim\mathbf{2} \supset \sim\mathbf{1}]$, y luego a $\mathbf{0} \supset [\mathbf{0} \supset \mathbf{1}]$, o $\mathbf{0} \supset \mathbf{1}$, y finalmente a **1**. Luego, el Axioma 3 es independiente.

EJERCICIOS

Para cada uno de los siguientes conjuntos de axiomas para cálculos proposicionales, pruebe la independencia de cada axioma:

*1. El sistema de Church P_N tiene los operadores primitivos $\sim$ y v, y en el mismo $P \supset Q$ se define $\sim P \vee Q$. Su regla es: de P y $P \supset Q$ inferir Q. Sus cuatro axiomas son:

Axioma 1. $(P \vee P) \supset P$

Axioma 2. $P \supset (P \vee Q)$

Axioma 3. $[P \vee (Q \vee R)] \supset [Q \vee (P \vee R)]$

Axioma 4. $(Q \supset R) \supset [(P \vee Q) \supset (P \vee R)]$

2. El sistema de Götlind-Rasiowa, P_G, tiene los mismos operadores primitivos, la misma definición de $\supset$ y la misma regla que el sistema P_N de antes. Sus tres axiomas son:

Axioma 1. $(P \vee P) \supset P$

Axioma 2. $P \supset (P \vee Q)$

Axioma 3. $(Q \supset R) \supset [(P \vee Q) \supset (R \vee P)]$

3. El sistema de Frege, F.S., tiene como operadores primitivos $\sim$ y $\supset$, y $P \vee Q$ definida como $\sim P \supset Q$. Su regla es: de P y $P \supset Q$ inferir Q. Sus cinco axiomas (quitando el axioma original 3 de Frege, $[P \supset (Q \supset R)] \supset [Q \supset (P \supset R)]$, que no era independiente) son:

Axioma 1. $P \supset (Q \supset P)$

Axioma 2. $[P \supset (Q \supset R)] \supset [(P \supset Q) \supset (P \supset R)]$

Axioma 3. $(P \supset Q) \supset (\sim Q \supset \sim P)$

Axioma 4. $\sim\sim P \supset P$

Axioma 5. $P \supset \sim\sim P$

4. El sistema de Lukasiewicz, L.S., tiene los mismos operadores primitivos, la misma definición de v y la misma regla que el sistema de Frege. Sus tres axiomas son:

Axioma 1. $P \supset (Q \supset P)$

Axioma 2. $[P \supset (Q \supset R)] \supset [(P \supset Q) \supset (P \supset R)]$

Axioma 3. $(\sim P \supset \sim Q) \supset (Q \supset P)$

7.5. Desarrollo del Cálculo

En el desarrollo de las reglas derivadas y teoremas de nuestro lenguaje objeto, motivados por el deseo de alcanzar el rigor consideraremos todos los símbolos completamente no interpretados. *Cuando se les interpreta normalmente,* las fórmulas $\sim RP$ y $P\sim R$ son lógicamente equivalentes. Pero no se les puede considerar así en tanto que *wff* de R.S., *en su desarrollo* y la *wff* $\sim RP \equiv P\sim R$ no se puede aceptar como un teorema hasta haberla formalmente deducido de los axiomas del sistema.

Es conveniente comenzar con la demostración de una regla derivada de inferencia para R.S. para convalidar una infinidad de argumentos en ese sistema. Se le enuncia de la manera siguiente

DR 1. $P \supset Q, Q \supset R \vdash \sim(\sim RP)$.

Su demostración requiere una secuencia de solamente cinco fórmulas bien formadas, la tercera de las cuales escribimos dos veces, una vez abreviada, y no abreviada la otra:

$$\begin{aligned}
&S_1: (P \supset Q) \supset [\sim(Q\sim R) \supset \sim(\sim RP)]\\
&S_2: P \supset Q\\
&S_3: \sim(Q\sim R) \supset \sim(\sim RP)\\
&S_3': (Q \supset R) \supset \sim(\sim RP)\\
&S_4: Q \supset R\\
&S_5: \sim(\sim RP)
\end{aligned}$$

El que esta secuencia de *S* (eses) sea una demostración se verifica fácilmente. El primer renglón, *S*, es el Axioma 3 del R.S. En verdad que existe una diferencia evidente entre S_1 y su formulación sintáctica del Axioma 3:

$$\begin{aligned}
S_1&: (P \supset Q) \supset [\sim(Q\sim R) \supset \sim(\sim RP)]\\
\text{Ax. } 3&: (P \supset Q) \supset [\sim(QR) \supset \sim(RP)]
\end{aligned}$$

porque S_1 contiene $\sim R$ siempre que el Axioma 3 contiene R. El asunto es que aquí estamos *hablando respecto* de las fórmulas bien formadas de R.S. Tanto S_1 como el Axioma 3 denotan una infinidad de *wff* de R.S. y toda *wff* de R.S. que se denota con S_1 *también se denota* mediante el Axioma 3 (aunque no recíprocamente). Esto podemos decirlo de otra manera. Nuestra primera regla derivada (DR 1) convalida una infinidad de argumentos que se formulan en R.S., como son:

$$\begin{array}{lcl}
\sim((\mathbf{A})\cdot(\sim(\mathbf{B}))) & & \sim((\mathbf{B})\cdot(\sim(\mathbf{C})))\\
\sim((\mathbf{B})\cdot(\sim(\mathbf{C}))) & \text{y} & \sim((\mathbf{C})\cdot(\sim(\mathbf{D})))\\
\sim((\sim(\mathbf{C}))\cdot(\mathbf{A})) & & \sim((\sim(\mathbf{D}))\cdot(\mathbf{B}))
\end{array}$$

así como

$$\begin{array}{lcl}
\sim((\mathbf{A})\cdot(\sim(\mathbf{A}))) & & \sim(((\mathbf{A})\cdot(\mathbf{B}))\cdot(\sim(\sim(\mathbf{C}))))\\
\sim((\mathbf{A})\cdot(\sim(\mathbf{A}))) & \text{y} & \sim((\sim(\mathbf{C}))\cdot(\sim((\mathbf{D}_1)\cdot(\mathbf{D}_2))))\\
\sim((\sim(\mathbf{A}))\cdot(\mathbf{A})) & & \sim((\sim((\mathbf{D}_1)\cdot(\mathbf{D}_2)))\cdot((\mathbf{A})\cdot(\mathbf{B})))
\end{array}$$

La secuencia de *S* en la demostración dada denota una infinidad de secuencias de *wff* de R.S., una para cada uno de los argumentos diferentes cuya validez se trata de demostrar. El primer renglón de la demostración *en* R.S. para el primero de los cuatro ejemplos dados es la *wff* de R.S. denotada con S_1 cuando "*P*", "*Q*" y "*R*" se toman como notaciones de "**A**", "**B**" y "**C**", respectivamente. Pero ésta es idénticamente la misma *wff* de R.S. denotada por nuestra formulación sintáctica del Axioma 3 cuando "*P*", "*Q*" y "*R*" en el mismo se consideran notaciones de "A", "B" y "$\sim C$", respectivamente. Por tanto, la primera *wff* de la secuencia de demostración es uno de los axiomas, infinitos en número, de R.S. que provee el Axioma 3. La situación es la misma con respecto a la demostración de la validez de cualquier otro argumento en R.S. que sea convalidado por DR 1.

Fácilmente se comprueba que los otros renglones de la secuencia se apegan a los requerimientos establecidos en nuestra definición de una demostración. Las dos premisas del argumento aparecen como S_2 y S_4 mientras que S_3 se sigue de S_1 y S_2 por R 1, y S_5 se sigue de S_3 (S_3') y S_4 por R 1. Es útil escribir la justificación que acompaña a cada renglón en la demostración: "Axioma 3" a la derecha de S_1, "premisa" a la derecha de S_2, etc. Estos rótulos no son parte de la demostración sino simplemente una ayuda para el lector y el autor de la demostración.

En esta etapa surge naturalmente la pregunta de si se puede recurrir a las reglas de inferencia derivadas al deducir teoremas a partir de los axiomas del sistema. Esto se discute de manera más conveniente en conexión con un ejemplo. Tomemos como nuestro primer teorema de R.S. la fórmula.

TEOREMA 1. $\vdash \sim(\sim PP)$

Esta *fórmula* se sigue directamente de los Axiomas 1 y 2 por medio de nuestra primera regla derivada DR 1. La siguiente es una secuencia de fórmulas que ya se ha demostrado que constituye un argumento válido (por nuestra demostración de DR 1)

$$
\begin{array}{ll}
S_1\colon P \supset PP & \text{Ax. 1} \\
S_2\colon PP \supset P & \text{Ax. 2} \\
S_3\colon \sim(\sim PP) & \text{DR 1}
\end{array}
$$

Por la discusión previa debiera estar claro que S_2 es el Axioma 2. Toda *wff* de R.S. denotada por nuestra formulación sintáctica del Axioma 2, "$PQ \supset P$", es un axioma, y toda *wff* de R.S. denotada por la expresión sintáctica "$PP \supset P$" es (también) denotada por "$PQ \supset P$" de modo que S_2 denota una infinidad de axiomas de R.S. que son denotados por nuestra formulación sintáctica del Axioma 2. Y el que S_3 de hecho se sigue de S_1 y S_2 mediante DR 1 puede verse observando que DR 1 da validez a cualquier argumento de la forma

$$
\begin{array}{l}
P \supset Q \\
Q \supset R \\
\sim(\sim RP)
\end{array}
$$

sin importar qué *wff* de R.S. sean las fórmulas P, Q y R. Luego DR 1 incluye el caso en que "P" y "R" idénticamente denotan las mismas fórmulas, mientras que "Q" y "PP" también denotan las mismas *wff*.

Aun cuando la secuencia S_1, S_2, S_3 pueda considerarse una *"prueba"* del Teorema 1, no constituye una *demostración*, pues por definición una *demostración* involucra exclusivamente el uso de R 1. Pero si tuviésemos una "prueba" en la que se usara una regla derivada, como DR 1 se usa en la secuencia dada, *la demostración de la regla derivada* podría *insertarse* en la secuencia. para dar lugar a una demostración propia. Así, en lugar de S_3 en la secuencia dada, la demostración de DR 1 puede sustituirse dando lugar a

S_1: $P \supset PP$	Ax. 1
S_2: $PP \supset P$	Ax. 2
S_3: $(P \supset PP) \supset [\sim(PP{\sim}P) \supset \sim(\sim PP)]$	Ax. 3
S_4: $\sim(PP{\sim}P) \supset \sim(\sim PP)$	R 1
S_4': $(PP \supset P) \supset \sim(\sim PP)$	
S_5: $\sim(\sim PP)$	R 1

Esta secuencia *es* una demostración; puesto que S_1, S_2 y S_3 son axiomas, S_4 se sigue de S_1 y S_3 por R 1 y S_5 de S_2 y S_4 por R 1. Además, esta demostración resulta de la "prueba" anterior haciendo ciertos cambios que se indican en la prueba misma. La secuencia original, que llamamos una "prueba", no es una demostración, sino la *descripción* de una demostración que es posible dar. Una prueba puede considerarse como una receta para la construcción de una demostración.

Esta situación es análoga a la que se presenta cuando se demuestran teoremas subsecuentes de un sistema deductivo no directamente de los axiomas sino de teoremas antes establecidos. Aquí de nuevo un ejemplo será útil en la discusión. Como nuestro segundo teorema tomaremos la fórmula

TEOREMA 2. $\vdash \sim\sim P \supset P$

que se sigue directamente del Teorema 1 por definición. Su prueba puede escribirse como:

S_1: $\sim(\sim\sim P{\sim}P)$	Teo. 1
S_1': $\sim\sim P \supset P$	df.

Es claro que esta secuencia *no es una demostración*, sino una *prueba*, pues dice exactamente cómo construir una demostración del Teo 2. En lugar de S_1 sólo necesitamos escribir nuestra demostración del Teo. 1 —o más bien la demostración de la versión del mismo que es pertinente a la conclusión deseada, el Teo. 2—. El enunciado general del Teo. 1 es

$$\vdash \sim(\sim PP)$$

que denota todas las *wff* que son de esta forma sin importar cuál es la *wff* que la variable sintáctica "*P*" denota. Toda *wff* denotada con "$\sim(\sim\sim P\sim P)$" es de esa forma y, por lo tanto, se incluye entre la infinidad de fórmulas que se pueden probar en R.S., rotuladas como Teorema 1. La demostración de la prueba indicada en el Teo. 2 puede escribirse como sigue:

S_1: $\sim P \supset \sim P\sim P$	Ax. 1
S_2: $\sim P\sim P \supset \sim P$	Ax. 2
S_3: $(\sim P \supset \sim P\sim P) \supset [\sim(\sim P\sim P\sim\sim P) \supset \sim(\sim\sim P\sim P)]$	Ax. 3
S_4: $\sim(\sim P\sim P\sim\sim P) \supset \sim(\sim\sim P\sim P)$	R 1
S_4': $(\sim P\sim P \supset \sim P) \supset \sim(\sim\sim P\sim P)$	df.
S_5: $\sim(\sim\sim P\sim P)$	R 1
S_5': $\sim\sim P \supset P$	df.

En general, las pruebas son más breves y, por tanto, de más fácil escritura que las demostraciones. Como cualquier prueba se puede convertir en una demostración sustituyendo cualquier renglón que sea un teorema previamente establecido por la demostración de ese teorema y cualquier renglón que resulte del uso de una regla derivada por la demostración de esa regla, pueden considerarse las pruebas como notaciones taquigráficas de las demostraciones. No obstante, las pruebas son *diferentes*, y no se les debiera *confundir* con las demostraciones.

Antes de continuar con el desarrollo de otros teoremas y reglas derivadas para R.S. debiera observarse que el Teo. 2 puede igualmente expresarse bien como $\vdash \sim P \vee P$ que es una versión del principio del Medio Excluido. Pues por nuestra definición del símbolo "v", "$\sim P \vee P$" es una abreviación de "$\sim(\sim\sim P\sim P)$" que tiene como abreviación alternativa "$\sim\sim P \supset P$", (Teo. 2). En la forma última, constituye una parte del principio de la Doble Negación.

Los siguientes son algunos teoremas adicionales de R.S. que damos junto con sus pruebas (*no* sus demostraciones):

TEOREMA 3. $\vdash \sim(QR) \supset (R \supset \sim Q)$

Prueba: $\vdash \sim\sim Q \supset Q$	Teo. 2
$\vdash (\sim\sim Q \supset Q) \supset [\sim(QR) \supset \sim(R\sim\sim Q)]$	Ax. 3
$\vdash \sim(QR) \supset \sim(R\sim\sim Q)$	R 1
$\vdash \sim(QR) \supset (R \supset \sim Q)$	df.

TEOREMA 4. $\vdash R \supset \sim\sim R$

Prueba: $\vdash \sim(\sim RR) \supset (R \supset \sim\sim R)$ Teo. 3
$\vdash \sim(\sim RR)$ Teo. 1
$\vdash R \supset \sim\sim R$ R 1

TEOREMA 5. $\vdash (Q \supset P) \supset (\sim P \supset \sim Q)$

Prueba: $\vdash \sim(Q\sim P) \supset (\sim P \supset \sim Q)$ Teo. 3
$\vdash (Q \supset P) \supset (\sim P \supset \sim Q)$ df.

Se observará que el Teo. 5 es parte del principio de Transposición, y que los Teoremas 2 y 4 son partes del principio de la Doble Negación. Pero, aunque tanto $P \supset \sim\sim P$ como $\sim\sim P \supset P$ se han probado como teoremas, *el* principio de la Doble Negación, $P \equiv \sim\sim P$, que abrevia $(P \supset \sim\sim P) \cdot (\sim\sim P \supset P)$ (aún) no está probado que sea un teorema. Se seguiría de los Teoremas 2 y 4 por el principio de Conjunción $P, Q \vdash P \cdot Q$, pero este último no ha quedado (aún) establecido como principio de inferencia válido o como regla derivada para el sistema R.S. Estas observaciones se hacen con la intención de arrojar más luz sobre el significado del símbolo "$\vdash$" Escribiendo "$\vdash P$" se afirma que hay una secuencia de fórmulas bien formadas que termina en P y que es una demostración. Al escribir "$\vdash P$ y $\vdash Q$" se afirma que hay *dos* secuencias de *wff* y que ambas son demostraciones, una de las cuales termina en P y la otra en Q. Pero al describir "$\vdash P \cdot Q$" se afirma que hay *una* secuencia de fórmulas bien formadas, que es una demostración y que termina en $P \cdot Q$. Esta aseveración, aunque es diferente, se sigue de la precedente, por el principio de Conjunción que estableceremos como DR 14.

La siguiente regla derivada se prueba:

DR 2. $\sim P \supset \sim Q \vdash Q \supset P$

Prueba: $(\sim P \supset \sim Q) \supset [\sim(\sim QQ) \supset \sim(Q\sim P)]$ Ax. 3
$\sim P \supset \sim Q$ premisa
$\sim(\sim QQ) \supset \sim(Q\sim P)$ R 1
$\sim(\sim QQ)$ Teo. 1
$\sim(Q\sim P)$ R 1
$Q \supset P$ df.

Aunque el Teorema 5, $\vdash (Q \supset P) \supset (\sim P \supset \sim Q)$, es parte del principio de transposición, DR 2, $\sim P \supset \sim Q \vdash Q \supset P$, no lo es, Ese principio afirma que $(Q \supset P) \equiv (\sim P \supset \sim Q)$, que es nuestra la abreviación para $[(Q \supset P) \supset (\sim P \supset \sim Q)] \cdot [(\sim P \supset \sim Q) \supset (Q \supset P)]$. El conjunto izquierdo es el Teorema 5 pero el conjunto derecho *no* es DR 2. Hay una importante diferencia entre

$$\sim P \supset \sim Q \vdash Q \supset P \quad \text{y} \quad \vdash (\sim P \supset \sim Q) \supset (Q \supset P)$$

La primera afirma que hay una secuencia de *wff*, cada una de las cuales es $\sim P \supset \sim Q$ o un axioma, o se sigue de dos *wff* que le preceden por R 1, y cuya última *wff* es $Q \supset P$. La segunda afirma que hay una secuencia de *wff*, cada una de las cuales es un axioma o se sigue de *wff* previas por R 1, y cuya última *wff* es $(\sim P \supset \sim Q) \supset (Q \supset P)$. (La segunda no se ha establecido aún.) Hay, desde luego, conexión entre ellas, como la hay entre dos enunciados tales como $P \vdash Q$ y $\vdash P \supset Q$. Dado el último fácilmente se establece el primero, pues a la secuencia de fórmulas bien formadas $S_1, S_2, \ldots, S_k$ (donde S_k es $P \supset Q$), que constituye una demostración para $\vdash P \supset Q$, sólo es necesario agregar P como S_{k+1} y derivar Q como S_{k+2}, pues se sigue de S_k y S_{k+1} mediante R 1. Pero aunque $\vdash P \supset Q$ se sigue de $P \vdash Q$, la prueba de esto es menos simple. Se le establecerá como Metateorema III (el Teorema de Deducción); pero hasta que se haya probado, no se puede suponer que valga en el sistema R.S.

Las siguientes son algunas reglas derivadas adicionales que damos con sus demostraciones:

DR 3. $P \supset Q \vdash RP \supset QR$

Prueba:	$(P \supset Q) \supset [\sim(QR) \supset \sim(RP)]$	Ax. 3
	$P \supset Q$	premisa
	$\sim(QR) \supset \sim(RP)$	R 1
	$RP \supset QR$	DR 2

DR 4. $P \supset Q, R \supset S \vdash \sim[\sim(QS)(PR)]$

Prueba:	$P \supset Q$	premisa
	$SP \supset QS$	DR 3
	$R \supset S$	premisa
	$PR \supset SP$	DR 3
	$\sim[\sim(QS)(PR)]$	DR 1

DR 5. $P \supset Q, Q \supset R, R \supset S \vdash P \supset S$

Prueba:	$R \supset S$	premisa
	$(R \supset S) \supset (\sim S \supset \sim R)$	Teo. 5
	$\sim S \supset \sim R$	R 1

$(\sim S \supset \sim R) \supset [\sim(\sim RP) \supset \sim(P \sim S)]$	Ax. 3
$\sim(\sim RP) \supset \sim(P \sim S)$	R 1
$P \supset Q$	premisa
$Q \supset R$	premisa
$\sim(\sim RP)$	DR 1
$\sim(P \sim S)$	R 1
$P \supset S$	df.

La última regla derivada mencionada se puede pensar que es un Silogismo Hipotético "generalizado". Al desarrollar el sistema R.S. conviene establecer DR 5 antes de probar el Silogismo Hipotético familiar $P \supset Q, Q \supset R \vdash P \supset R$. Este último quedará establecido como DR 6. Para facilidad en la prueba de la siguiente regla derivada es deseable que se prueben tres teoremas adicionales. Sus pruebas se dejan como ejercicios al lector:

*TEOREMA 6. $\vdash (R \sim\sim P) \supset (PR)$

TEOREMA 7. $\vdash P \supset P$

TEOREMA 8. $\vdash RP \supset PR$

Es conveniente enunciar y probar un corolario del Teorema 7:

TEOREMA 7, COR. $\vdash P \vee \sim P$

Prueba:	$\sim P \supset \sim P$	Teo. 7
	$\sim(\sim P \sim\sim P)$	df.
	$P \vee \sim P$	df.

Será instructivo para el lector que construya una *demostración* (y no meramente una prueba) del Teorema 7. Es una tautología tan obvia que parece trivial y, sin embargo, su demostración en el sistema R.S. no es breve.

Tomados conjuntamente, DR 5 y el Teorema 7 proporcionan una prueba fácil de la validez del Silogismo Hipotético

*DR 6. $P \supset Q, Q \supset R \vdash P \supset R$

En la prueba del siguiente Metateorema serán útiles algunos teoremas y reglas derivadas adicionales.

TEOREMA 9. $\vdash \sim(PR) \supset \sim(RP)$

DR 7. $P \supset Q, R \supset S \vdash PR \supset QS$

Es conveniente asentar dos corolarios de DR 7:

DR 7, COR. 1. $P \supset Q \vdash PR \supset QR$

DR 7, COR. 2. $R \supset S \vdash PR \supset PS$

DR 8. $P \supset Q, P \supset R \vdash P \supset QR$

* TEOREMA 10. $\vdash (PQ)R \supset P(QR)$

La otra mitad del principio de Asociación para "·" es un útil corolario del Teo. 10:

TEOREMA 10, COR. $\vdash P(QR) \supset (PQ)R$

DR 9. $P \supset R, Q \supset S \vdash (P \vee Q) \supset (R \vee S)$
*DR 10. $P \supset R, Q \supset R \vdash (P \vee Q) \supset R$

TEOREMA 11. $\vdash (P \vee Q) \supset (Q \vee P)$

TEOREMA 12. $\vdash (P \vee Q) \vee R \supset P \vee (Q \vee R)$

La otra mitad del principio de Asociación para "v" es un útil corolario del Teorema 12:

TEOREMA 12, COR. $\vdash P \vee (Q \vee R) \supset (P \vee Q) \vee R$

TEOREMA 13. $\vdash [P \supset (Q \supset R)] \supset [PQ \supset R]$

*TEOREMA 14. $\vdash [PQ \supset R] \supset [P \supset (Q \supset R)]$

Estos dos últimos teoremas son las dos mitades del principio de Exportación, pero antes de obtener el principio mismo a partir de ellos hay que establecer el principio de Conjunción (como DR 14).

DR 11. $P \supset Q, P \supset (Q \supset R) \vdash P \supset R$

TEOREMA 15.. $\vdash P \supset (Q \supset PQ)$

TEOREMA 16. $\vdash P \supset (Q \supset P)$

Establecidas estas reglas derivadas y teoremas estamos en posición de probar el Teorema de Deducción para R.S. como

METATEOREMA III. *Si* $P_1, P_2, \ldots, P_{n-1}, P_n \vdash Q$ *entonces* $P_1, P_2, \ldots, P_{n-1} \vdash P_n \supset Q$.

Prueba: Suponemos que $P_1, P_2, \ldots, P_{n-1}, P_n \vdash Q$, es decir, que hay una demostración o secuencia de *wff* $S_1, S_2, \ldots, S_s$ tal que cada S_i es un axioma o una $P_i (i = 1, 2, \ldots, n)$, o se sigue de dos S previas por R 1 y S_s es Q. Ahora considérese la secuencia de *wff* $P_n \supset S_1$, $P_n \supset S_2, \ldots, P_n \supset S_s$. Si podemos completar las *wff* antes de cada $P_n \supset S_i$ de modo que la secuencia total que resulte sea una demostración a partir de $P_1, P_2, \ldots, P_{n-1}$ de modo que cada renglón de la secuencia total resultante sea un axioma o una $P_i (i = 1, 2, \ldots, n-1)$ o se siga de dos renglones previos mediante R 1, entonces como $P_n \supset S_s$ es $P_n \supset Q$ tendremos una demostración de que $P_1, P_2, \ldots, P_{n-1} \vdash P_n \supset Q$. El que podamos completar para obtener la demostración deseada se prueba por inducción débil sobre el número de fórmulas $P_n \supset S_i$ involucradas.

(α) En el caso $i = 1$, sólo tenemos la fórmula $P_n \supset S_1$ que considerar. Por hipótesis S_1 es un axioma o una $P_i (i = 1, 2, \ldots, n)$.

CASO 1. S_1 es un axioma. Aquí completamos con la demostración del Teorema 16, $\vdash S_1 \supset (P_n \supset S_1)$ y S_1 mismo. De las dos últimas fórmulas deducimos $P_n \supset S_1$ por R 1, de modo que la secuencia total de *wff* hasta $P_n \supset S_1$ inclusive, es una demostración de que $\vdash P_n \supset S_1$ y, por tanto, de que $P_1, P_2, \ldots, P_{n-1} \vdash P_n \supset S_1$.

CASO 2. S_1 es una $P_i (i = 1, 2, \ldots, n - 1)$. Aquí completamos con la demostración del Teorema 16, $\vdash S_1 \supset (P_n \supset S_1)$ y S_1 mismo. De las dos últimas fórmulas deducimos $P_n \supset S_1$ por R 1, de modo que la secuencia total de *wff* hasta $P_n \supset S_1$ inclusive, es una demostración de que $S_1 \vdash P_n \supset S_1$. Puesto que S_1 es una $P_i (i = 1, 2, \ldots, n - 1)$ tenemos una demostración de $P_1, P_2, \ldots, P_{n-1} \vdash P_n \supset S_1$.

CASO 3. S_1 es P_n. Aquí completamos con la demostración del Teorema 7, $\vdash P_n \supset P_n$, esto es, $\vdash P_n \supset S_1$, de modo que la secuencia total de *wff* hasta $P_n \supset S_1$ inclusive es una demostración de que $\vdash P_n \supset S_1$ y, por tanto, de $P_1, P_2, \ldots, P_{n-1} \vdash P_n \supset S_1$.

(β) Ahora suponemos que hemos completado apropiadamente todos los renglones hasta $P_n \supset S_{k-1}$ inclusive, de modo que tenemos una secuencia de *wff* que es una demostración de $P_1, P_2, \ldots, P_{n-1} \vdash P_n \supset S_{k-1}$. Bajo esta hipótesis mostramos cómo completar para incluir $P_n \supset S_k$ en la secuencia que entonces será una demostración de $P_1, P_2, \ldots, P_{n-1} \vdash P_n \supset S_k$. Por hipótesis S_k es o un axioma o una $P_i (i = 1, 2, \ldots, n)$ o resultó en la demostración original de la aplicación de R 1 a dos S precedentes, digamos, S_i y $S_j (i, j < k)$.

CASO 1. S_k es un axioma. Insertar la demostración del Teorema 16, $\vdash S_k \supset (P_n \supset S_k)$ y S_k mismo, y derivar $P_n \supset S_k$ por R 1. La secuencia total será entonces una demostración de $P_1, P_2, \ldots, P_{n-1} \vdash P_n \supset S_k$.

CASO 2. S_k es una $P_i (i = 1, 2, \ldots, n - 1)$. Insertar la demostración del Teorema 16, $\vdash S_k \supset (P_n \supset S_k)$, y S_k mismo, y derivar $P_n \supset S_k$ por R 1. La secuencia total será entonces una demostración de $P_1, P_2, \ldots, P_{n-1} \vdash P_n \supset S_k$.

CASO 3. S_k es P_n. Insertar la demostración del Teorema 7, $\vdash P_n \supset P_n$, esto es, $\vdash P_n \supset S_k$, y la secuencia total será una demostración de $P_1, P_2, \ldots, P_{n-1} \vdash P_n \supset S_k$.

CASO 4. S_k resultó (en la demostración original de $P_1, P_2, \ldots, P_n \vdash Q$), por aplicación de R 1 a dos S anteriores, digamos S_i y S_j donde $i, j < k$ y S_i es de la forma $S_j \supset S_k$. Por la hipótesis del caso β hemos ya completado hasta $P_n \supset S_j$ y $P_n \supset (S_j \supset S_k)$ inclusive. Por DR 11, que se anuncia como

$$P \supset Q, P \supset (Q \supset R) \vdash P \supset R$$

tenemos

$$P_n \supset S_j, P_n \supset (S_j \supset S_k) \vdash P_n \supset S_k$$

Insertar la demostración de esta regla derivada cuyo último renglón es $P_n \supset S_k$ y la secuencia total será entonces una demostración de $P_1, P_2, \ldots, P_{n-1} \vdash P_n \supset S_k$.

Ahora, por inducción débil, concluimos que es posible completar cualquier número de renglones $P_n \supset S_i$ de modo tal que la secuencia resultante sea una demostración de $P_1, P_2, \ldots, P_{n-1} \vdash P_n \supset S_i$. Así, podemos hacerlo para la demostración de $P_1, P_2, \ldots, P_{n-1}, P_n \vdash Q$ no importando cuántos renglones $S_1, S_2, \ldots, S_s$, contenga. Y como S_s es Q podemos construir una demostración de $P_1, P_2, \ldots, P_{n-1} \vdash P_n \supset Q$. Así concluye nuestra prueba del Teorema de Deducción.

Una consecuencia inmediata es

MT III, COROLARIO: *Si* $P \vdash Q$ *entonces* $\vdash P \supset Q$.

Otro corolario tan obvio es la conclusión más general de que: el Teorema de Deducción es válido para *cualquier* cálculo proposicional que solamente tenga la regla *Modus Ponens* y contenga demostraciones para $P \supset P$, $P \supset (Q \supset P)$, y $(P \supset Q) \supset \{[P \supset (Q \supset R)] \supset (P \supset R)\}$.

La manera en que puede usarse el Metateorema III (abreviado como "D.T.") en las demostraciones queda indicada en la siguiente prueba de DR 6. Primero demostramos la relativamente trivial DR 6′: $P \supset Q, Q \supset R, P \vdash R$ siguiendo los pasos que se muestran a continuación:

$P \supset Q$	premisa
P	premisa
Q	R 1
$Q \supset R$	premisa
R	R 1

Ya entonces podemos probar DR 6 por simple aplicación de D.T. una vez y la prueba se puede escribir como

$P \supset Q, Q \supset R, P \vdash R$	DR 6′
$P \supset Q, Q \supset R \vdash P \supset R$	D.T.

Dado que D.T. nos proporciona un método efectivo de construcción de una nueva demostración para DR 6 sobre la base de la anterior para DR 6′, la prueba precedente de dos pasos es una recta perfectamente adecuada para la demostración que se desea. No debiera pensarse que se ha "malgastado" un esfuerzo al construir pruebas más difíciles de teoremas anteriores, pues había que establecerlas antes de probar el Teorema de Deducción mismo.

Los siguientes son algunos teoremas y reglas derivadas de R.S.

TEOREMA 17. $\vdash P \supset (Q \vee P)$

*TEOREMA 17, COR. $\vdash P \supset (P \vee Q)$

TEOREMA 18. $\vdash (P \vee Q)R \supset (PR \vee QR)$

Este teorema constituye una parte del principio de Distribución —la distribución de "·" con respecto a "v".

DR 12. $P \supset {\sim}Q \vdash P \supset {\sim}(QR)$
DR 13. $P \supset {\sim}R \vdash P \supset {\sim}(QR)$
*DR 14. $P, Q \vdash PQ$

Aquí, finalmente, tenemos el principio de Conjunción. Nos permite establecer el principio de la Doble Negación como nuestro teorema siguiente, que es una consecuencia directa del Teo. 2 y el Teo. 4 por DR 14.

TEOREMA 19. $\vdash P \equiv {\sim}{\sim}P$

Sin embargo, el Teorema 19, por sí mismo, no nos permite reemplazar ${\sim}{\sim}P$ por P siempre que aparezca en el interior de una *wff* más extensa. Es decir, donde sea posible demostrar una *wff* $\vdash$ (- - - ${\sim}{\sim}P$ . . .) la mera equivalencia de ${\sim}{\sim}P$ y P no nos permite inferir, simplemente, que $\vdash$ (- - - P . . .). La inferencia sería válida, pero hay que *probar* que es válida dentro del sistema R.S. La legitimidad de semejante reemplazo está asegurada por nuestro siguiente Metateorema. Antes de enunciarlo y demostrarlo, será conveniente establecer las siguientes:

DR 15. $P \equiv Q \vdash {\sim}P \equiv {\sim}Q$
DR 16. $P \equiv Q, R \equiv S \vdash PR \equiv QS$
DR 16, COR. $P \equiv Q, R \equiv S \vdash P \vee R \equiv Q \vee S$

Las pruebas se dejan como ejercicios para el lector.

Ahora estamos en posición de probar la Regla de Reemplazo para R.S.

METATEOREMA IV (*Regla de Reemplazo*). *Sean* $P_1, P_2, \ldots, P_n$ *cualesquier wff, sea* Q *cualquier wff que no aparece en ninguna* P_i, *y* *sea S cualquier wff que no contiene componentes que no sean Q o P_i ($1 \leq i \leq n$). Sea S^* una wff que resulta de reemplazar cualquier número de ocurrencias de Q en S por R; entonces* $Q \equiv R \vdash S \equiv S^*$.

Prueba: Usamos la inducción fuerte sobre el número de símbolos de S, contando cada ocurrencia de $\cdot$, $\sim$, Q, o cualquier P_i como un solo símbolo.

(α) $n = 1$. En este caso S es Q o P_i solamente.

CASO 1. S es Q y S^* es R. Es obvio que $Q \equiv R \vdash Q \equiv R$, lo que podemos escribir como $Q \equiv R \vdash S \equiv S^*$.

CASO 2. S es Q y S^* es Q también. Puesto que $\vdash Q \equiv Q$, por el Teo. 7 y DR 14, $\vdash S \equiv S^*$, luego $Q \equiv R \vdash S \equiv S^*$.

CASO 3. S es una P_i. En este caso S^* es también la misma P_i. Dado que $\vdash P_i \equiv P_i$ por el Teo. 7 y DR 14, $\vdash S \equiv S^*$ luego $Q \equiv R \vdash S \equiv S^*$.

(β) Aquí se supone la verdad del Metateorema para cualquier S que contenga $< n$ símbolos. Considerar cualquier S que contenga exactamente n símbolos ($n > 1$). Es claro que S debe ser $\sim S_1$ o $S_1 \cdot S_2$.

CASO 1. S es $\sim S_1$. Como S contiene n símbolos, S_1 contiene $< n$ símbolos, así que por la hipótesis del caso β, $Q \equiv R \vdash S_1 \equiv S_1^*$, donde S_1^* es una *wff* que resulta del reemplazo de cualquier número de ocurrencias de Q en S_1 por R. Pero $S_1 \equiv S_1^* \vdash \sim S_1 \equiv \sim S_1^*$ por DR 15 y como $\sim S_1^*$ es obviamente lo mismo que S^*, tenemos $Q \equiv R \vdash S \equiv S^*$.

CASO 2. S es $S_1 \cdot S_2$. Aquí S_1 y S_2, cada una contiene $< n$ símbolos, de modo que por la hipótesis del caso β, $Q \equiv R \vdash S_1 \equiv S_1^*$ y $Q \equiv R \vdash S_2 \equiv S_2^*$. Pero por DR 16, $S_1 \equiv S_1^*, S_2 \equiv S_2^* \vdash S_1 \cdot S_2 \equiv S_1^* \cdot S_2^*$ y como toda $S_1^* \cdot S_2^*$ es una S^*, $Q \equiv R \vdash S \equiv S^*$.

De modo que por la inducción fuerte inferimos que sin atención al número de símbolos que haya en S, $Q \equiv R \vdash S \equiv S^*$.

MT IV. COROLARIO: *Si Q, R, S y S^* son como en el* Metateorema IV, *entonces* $Q \equiv R, S \vdash S^*$.

La prueba del corolario es ,via.

De la lista de Reglas de Inferencia usadas al probar la validez de argumentos en el Cap. 3, las nueve primeras eran formas de argumento válidas elementales propiamente, y las últimas diez eran equivalencias que se suponían sustituibles entre sí. De las nueve primeras, la primera, *Modus Ponens*, es la regla primitiva R 1 de R.S. La tercera, el Silogismo Hipotético, ya se ha establecido como DR 6; y la octava, el principio de Conjunción, se ha probado como DR 14. Las seis restantes se prueban con facilidad como reglas derivadas de R.S. Se pueden alistar como

DR 17. $P \supset Q, \sim Q \vdash \sim P$ (*Modus Tollens*)
DR 18. $P \vee Q, \sim P \vdash Q$ (Silogismo Disyuntivo)
DR 19. $PQ \vdash P$ (Simplificación)
DR 19, Cor. $PQ \vdash Q$
*DR 20. $(P \supset Q)(R \supset S), P \vee R \vdash Q \vee S$ (Dilema Constructivo)
DR 21. $(P \supset Q)(R \supset S), \sim Q \vee \sim S \vdash \sim P \vee \sim R$ (Dilema Destructivo)
DR 22. $P \vdash P \vee Q$ (Adición)

Las equivalencias que constituían las últimas diez de las diecinueve Reglas de Inferencia se establecen fácilmente. El principio de la Doble Negación se ha probado ya como Teorema 19. Los principios de Conmutación y Asociación se obtienen con facilidad aplicando DR 14 a teoremas y corolarios ya establecidos.

Teorema 20. $\vdash P \vee Q \equiv Q \vee P$ (Conmutación de "v")

Teorema 21. $\vdash PQ \equiv QP$ (Conmutación de "·")

Teorema 22. $\vdash [P \vee (Q \vee R)] \equiv [(P \vee Q) \vee R]$ (Asociación de "v")

Teorema 23. $\vdash P(QR) \equiv (PQ)R$ (Asociación de "·")

El principio de Transposición puede obtenerse por DR 14 del Teorema 5 y lo que resulta de aplicar el Teorema de Deducción a DR 2.

Teorema 24. $\vdash (P \supset Q) \equiv (\sim Q \supset \sim P)$ (Transposición)

La prueba del principio de Exportación es aún más obvia.

Teorema 25. $\vdash [(PQ) \supset R] \equiv [P \supset (Q \supset R)]$ (Exportación)

Las pruebas del grupo final de teoremas del sistema R.S. serán dejadas al lector como ejercicios.

Teorema 26. $\vdash P \equiv PP$ (Tautología)

Teorema 26. Cor. $\vdash P \equiv P \vee P$ (Tautología)

Teorema 27. $\vdash \sim(PQ) \equiv (\sim P \vee \sim Q)$ (Teorema de De Morgan)

TEOREMA 28. $\vdash \sim(P \vee Q) \equiv (\sim P \sim Q)$ (Teorema de De Morgan)

TEOREMA 29. $\vdash (P \supset Q) \equiv (\sim P \vee Q)$ (Implicación Material)

*TEOREMA 30. $\vdash P(Q \vee R) \equiv PQ \vee PR$ (Distrib. de "·" sobre "v")

TEOREMA 30, COR. $\vdash (P \vee Q)R \equiv PR \vee QR$

TEOREMA 31. $\vdash (P \equiv Q) \equiv [PQ \vee \sim P \sim Q]$ (Equivalencia Material)

TEOREMA 32. $\vdash P \vee QR \equiv (P \vee Q)(P \vee R)$ (Distrib. de "v" sobre "·")

Establecidos los teoremas de este último grupo, se ha mostrado que R.S. contiene todos los principios lógicos a que se hace llamado para convalidar los argumentos extendidos del Cap. 3. Conteniendo, como de hecho contiene, el Teorema de Deducción y el principio de la Doble Negación, también es adecuado a los métodos de Prueba Indirecta y Prueba Condicional que se estudiaron en el Cap. 3. Todavía queda por probar que el sistema es *deductivamente completo*, lo que se establece en la sección que sigue.

7.6. Completud Deductiva

En los Teoremas 22, 23 y 30 tenemos ya la Asociación de "v" y "·", y la Distribución de "·" respecto a "v". Pero como se dice ahí, estas propiedades sólo se han establecido para los casos que exactamente involucran tres *wff*. Al probar la completud deductiva de R.S. es conveniente hacer uso de principios de Asociación y Distribución más generales. Estos se establecerán como nuestros tres siguientes Metateoremas. El primero establece la Asociación y Conmutación generales del símbolo conjuntivo "·", asegurando que sin importar el orden o agrupamiento de cualquier número de fórmulas bien formadas al conjuntarlas, la fórmula bien formada que resulte será equivalente al resultado de conjuntarlas en cualquier otro orden o agrupamiento. Esto podemos enunciarlo formalmente como:

METATEOREMA V. *Sean* $\mathrm{P}_1, \mathrm{P}_2, \ldots, \mathrm{P}_n$ *cualesquier wff y* Q *y* R *dos wff que se construyen a partir de ellas por medio de "·". Si cada* P_i *(*$1 \leq i \leq n$*) aparece exactamente una vez en cada una de las wff* Q *y* R*, entonces* $\vdash \mathrm{Q} \equiv \mathrm{R}$.

Prueba: Se usa inducción fuerte sobre el número de "factores" (es decir, conjuntos) P_i en Q y R.

α) Cuando $n = 1$, Q y R son idénticamente iguales a la misma *wff* P_1, así que $\vdash \mathrm{Q} \equiv \mathrm{R}$ por el Teo. 7 y DR 14.

β) Aquí suponemos que el Metateorema es verdadero para $k < n$ factores $P_1, P_2, \ldots, P_k$. Ahora, considérense Q y R construidas cada una con $n > 1$ factores $P_1, P_2, \ldots P_n$. Q es $S \cdot T$ y R es $X \cdot Y$.

Cada una de las *wff* S y T contiene al menos uno de los factores $P_1, P_2, \ldots, P_n$. Podemos suponer que P_1 es un factor de S, porque en el caso contrario podemos aplicar el Teorema 21 y rotular de nuevo para obtener $\vdash Q \equiv S \cdot T$ donde S contiene ahora P_1 como factor.

Puesto que T contiene por lo menos una de $P_2, P_3, \ldots, P_n$ como factor, S contiene $<n$ de los factores $P_1, P_2, \ldots, P_n$. Luego, o S es P_1, y $\vdash Q \equiv P_1 \cdot T$ o por el supuesto del caso β $\vdash S \equiv P_1 \cdot S'$, donde S' es una *wff* que contiene todos los factores de S excepto P_1. En el último caso, por MT IV, Cor., tenemos

$$\vdash Q \equiv (P_1 \cdot S') \cdot T$$

y por el Teo. 23 y MT. IV, Cor.

$$\vdash Q \equiv P_1 \cdot (S' \cdot T)$$

En ambos casos hay una *wff*, llamémosla T', tal que

$$\vdash Q \equiv P_1 \cdot T'$$

Por el mismo razonamiento podemos mostrar que hay una *wff*, llamémosla Y', tal que

$$\vdash R \equiv P_1 \cdot Y'$$

Cada una de las *wff* T' y Y', contiene los $n - 1$ factores $P_2, P_3, \ldots, P_n$, de modo que por el supuesto del caso β

$$\vdash T' \equiv Y'$$

Por el Teo. 7 y DR 14 tenemos $\vdash P_1 \equiv P_1$, así que por DR 16 tenemos

$$\vdash P_1 \cdot T' \equiv P_1 \cdot Y'$$

y por MT. IV, Cor.

$$\vdash Q \equiv R$$

El Metateorema V ahora se sigue por inducción fuerte.

El principio siguiente concierne a la Asociación y Conmutación general del símbolo de disyunción "v". No importando en qué orden o agrupamiento se conecten cualesquier *wff* por medio del símbolo "v", la disyunción que resulta o "suma lógica" será equivalente al resultado de conectarlas por medio de "v" en cualquier otro orden o agrupamiento. Esto se enuncia de manera formal como

METATEOREMA VI. *Sean $P_1, P_2, \ldots, P_n$ cualesquier wff y Q y R, dos wff construidas a partir de ellas por medio del símbolo "v".* Si cada *$P_i (1 \leq i \leq n)$ aparece exactamente una vez en cada una de las wff Q y R, entonces $\vdash Q \equiv R$.*

La prueba se dejará como ejercicio para el lector.

MT. VI, COROLARIO. *Si Q y R son como en el* Metateorema VI, *entonces $Q \vdash R$.* La prueba de este corolario es obvia.

Por último, deseamos establecer un enunciado generalizado de la Distribución de la Conjunción respecto a la Disyunción, esto es, de "·" respecto a "v". Este se expresa como

METATEOREMA VII. *Si Q es la suma lógica de $P_1, P_2, \ldots, P_n$, es decir $(P_1 \vee P_{2v} \ldots P_n)$ acordando la asociación a la izquierda, y si S es la suma lógica de $P_1R, P_2R, \ldots, P_nR$ entonces $\vdash QR \equiv S$.*

Prueba: Usamos la inducción débil sobre el número de "sumandos" (es decir, los disyuntos) $P_1, P_2, \ldots, P_n$.

α) Si $n = 1$, Q es P_1, QR es P_1R y S es P_1R también. Por el Teo. 7 y DR 14, $\vdash P_1R \equiv P_1R$ que es $\vdash QR \equiv S$.

β) Suponer el Metateorema verdadero para los k sumandos $P_1, P_2, \ldots, P_k$. Ahora sea Q la suma lógica o disyunción de $P_1, P_2, \ldots, P_k, P_{k+1}$ y sea S la suma lógica de $P_1R, P_2R, \ldots, P_kR, P_{k+1}R$. Ahora argumentamos lo siguiente

$\vdash (P_1 \vee P_2 \vee \ldots \vee P_k)R \equiv P_1R \vee P_2R \vee \ldots \vee P_kR$	por el supuesto del caso β
$\vdash P_{k+1}R \equiv P_{k+1}R$	Teo. 7 y DR 14
$\vdash (P_1 \vee P_2 \vee \ldots \vee P_k)R \vee P_{k+1}R \equiv (P_1R \vee P_2R \vee \ldots \vee P_kR) \vee P_{k+1}R$	DR 16, Cor.
$\vdash [(P_1 \vee P_2 \vee \ldots \vee P_k) \vee P_{k+1}]R \equiv (P_1 \vee P_2 \vee \ldots \vee P_k)R \vee P_{k+1}R$	Teo. 30, Cor.
$\vdash [(P_1 \vee P_2 \vee \ldots \vee P_k) \vee P_{k+1}]R \equiv (P_1R \vee P_2R \vee \ldots \vee P_kR) \vee P_{k+1}R$	MT. IV, Cor.

Por nuestro convenio de *asociar a la izquierda*, el renglón precedente también se puede escribir como

$$\vdash (P_1 \vee P_2 \vee \ldots \vee P_k \vee P_{k+1})R \equiv P_1R \vee P_2R \vee \ldots \vee P_kR \vee P_{k+1}R$$

lo que es $\vdash QR \equiv S$ donde Q contiene $k + 1$ sumandos.

Por inducción débil, se sigue ahora el Metateorema VII.

Para probar que R.S. es deductivamente completo, mostramos que todas las tautologías son demostrables como teoremas dentro del sistema. Puesto que todas las tautologías se pueden expresar como *wff* de R.S. (por MT 1), la completud deductiva de R.S. se expresa como: Si S es una tautología entonces $\vdash S$. Un criterio para decidir si cualquier *wff* es o no es una tautología lo proporciona el método de las tablas de verdad. Cualquier *wff* S tiene una tabla de verdad con tantas columnas iniciales como símbolos proposicionales distintos hay en S. Si hay n de ellos, digamos $P_1, P_2, \ldots, P_n$, la tautología S tendrá esta tabla de verdad:

P_1	P_2	...	P_n	S
T	**T**	...	**T**	**T**
T	**T**	...	**F**	**T**
.	.	...	.	.
.	.	...	.	.
.	.	...	.	.
F	**F**	...	**T**	**T**
F	**F**	...	**F**	**T**

Cualquier tabla tal tiene 2^n renglones, cada uno de los cuales representa una asignación diferente de las **T** y **F** a los P_i, y aparecen todas las asignaciones posibles. El que sólo haya **T** en la columna bajo S indica que toda asignación posible de las **T** y **F** a las P_i debe asignar una **T** a S.

Para mostrar que $\vdash S$ para todo S tal, establecemos lo siguiente:

primero, que cada renglón de su tabla de verdad, esto es, cada asignación de valores de verdad a las P_i, puede representarse por una *wff* de R.S., el primer renglón por Q_1, el segundo por $Q_2, \ldots,$ y el último o 2^n-ésimo por Q_{2n};

segundo, que si $Q_1, Q_2, \ldots, Q_{2n}$ son las 2^n *wff* que representan todas las asignaciones posibles de las **T** y **F** a los P_i, entonces $\vdash (Q_1 \vee Q_2 \vee \ldots \vee Q_{2n})$; y

tercero, que si una asignación particular de las **T** y **F** a los P_i, asigna una **T** a S, entonces si Q_j representa esa asignación particular, tenemos $\vdash Q_j \supset S$.

Es fácil ver que estos hechos son suficientes para probar $\vdash S$. Si la tabla de verdad para S tiene sólo valores **T** en la columna encabezada por S, entonces $\vdash Q_1 \supset S$, $\vdash Q_2 \supset S, \ldots, \vdash Q_{2n} \supset S$. De aquí, usando DR 10, $2^n - 1$ veces, tenemos $\vdash (Q_1 \vee Q_2 \vee \ldots \vee Q_{2n}) \supset S$. Y habiendo establecido que $\vdash (Q_1 \vee Q_2 \vee \ldots \vee Q_{2n})$ obtenemos $\vdash S$ por R 1.

Ahora atacaremos el problema detalladamente. Primero debemos mostrar que cada asignación posible de valores **T** y **F** a los P_i de un conjunto (P_1, P_2, ..., P_n) se puede representar por una *wff*. Será conveniente la siguiente:

Definición. Se dice que una *wff representa* una asignación particular de valores de verdad a los símbolos proposicionales P_1, P_2, ..., P_n si y sólo si (en la interpretación normal de nuestros símbolos operadores) es esa la única asignación de valores de verdad que hace verdadera la *wff*.

Si se asigna **T** a todo P_i, esta asignación está representada por la conjunción $P_1 \cdot P_2 \cdot \ldots \cdot P_n$, que denotamos con "$Q_1$". Si se asignan las **T** a todos los P_i, exceptuando P_n, al que se asigna **F**, la asignación está representada por la conjunción $P_1 \cdot P_2 \cdot \ldots \cdot P_{n-1} \cdot \sim P_n$ que denotamos "Q_2". Se hace lo análogo para cualquier otra asignación posible correspondiente a todos los renglones de la tabla de verdad, terminando con la conjunción $\sim P_1 \cdot \sim P_2 \cdot \ldots \cdot \sim P_n$ que denotamos "Q_{2n}". De esta manera cualquier renglón de cualquier tabla de verdad puede representarse por una *wff* de R.S., lo que establece el *primer* resultado mencionado en el párrafo precedente.

Ahora nos ocupamos del *segundo*, que expresamos como:

METATEOREMA VIII. *Si* $Q_1, Q_2, \ldots, Q_{2n}$ *representa todas las posibles asignaciones de valores de verdad a los n símbolos proposicionales distintos* P_1, P_2, ..., P_n, entonces $\vdash (Q_1 \vee Q_2 \vee \ldots \vee Q_{2n})$.

Prueba: Usamos inducción débil sobre el número de los P_i

α) Si $n = 1$, $2^n = 2$, y Q_1 es P_1 y Q_2 es $\sim P_1$. Aquí tenemos $\vdash P_1 \vee \sim P_1$ por el Teo. 7, Cor., que es $\vdash (Q_1 \vee Q_2)$.

β) Supóngase el Metateorema para P_1, P_2, ..., P_k. Ahora considérese el conjunto P_1, P_2, ..., P_k, P_{k+1}. Si Q_1, Q_2, ..., Q_{2k} representan todas las asignaciones distintas posibles de valores de verdad a P_1, P_2, ..., P_k, *tenemos* $\vdash (Q_1 \vee Q_2 \vee \ldots \vee Q_{2k})$ por la hipótesis del caso β.

Ahora proseguimos nuestro argumento como:

$\vdash P_{k+1} \vee \sim P_{k+1}$	Teo. 7, Cor.
$\vdash (Q_1 \vee Q_2 \vee \ldots \vee Q_{2^k})(P_{k+1} \vee \sim P_{k+1})$	DR 14
$\vdash (Q_1 \vee Q_2 \vee \ldots \vee Q_{2^k})(P_{k+1} \vee \sim P_{k+1}) \equiv$ $(Q_1 \vee Q_2 \vee \ldots \vee Q_{2^k})P_{k+1} \vee (Q_1 \vee Q_2 \vee \ldots \vee Q_{2^k})\sim P_{k+1}$	Teo. 30
$\vdash (Q_1 \vee Q_2 \vee \ldots \vee Q_{2^k})P_{k+1} \vee (Q_1 \vee Q_2 \vee \ldots \vee Q_{2^k})\sim P_{k+1}$	MT IV, Cor.
$\vdash (Q_1 \vee Q_2 \vee \ldots \vee Q_{2^k})P_{k+1} \equiv (Q_1 P_{k+1} \vee Q_2 P_{k+1} \vee \ldots \vee Q_{2^k} P_{k+1})$	MT VII
$\vdash (Q_1 \vee Q_2 \vee \ldots \vee Q_{2^k})\sim P_{k+1} \equiv$ $(Q_1 \sim P_{k+1} \vee Q_2 \sim P_{k+1} \vee \ldots \vee Q_{2^k} \sim P_{k+1})$	MT VII

$$\vdash (Q_1P_{k+1} \vee Q_2P_{k+1} \vee \ldots \vee Q_{2^k}P_{k+1}) \vee (Q_1 \sim P_{k+1} \vee Q_2 \sim P_{k+1} \vee \ldots \vee Q_{2^k} \sim P_{k+1}) \quad \text{MT IV, Cor.}$$

$$\vdash Q_1P_{k+1} \vee Q_1 \sim P_{k+1} \vee Q_2P_{k+1} \vee Q_2 \sim P_{k+1} \vee \ldots \vee Q_{2^k}P_{k+1} \vee Q_{2^k} \sim P_{k+1} \quad \text{MT VI, Cor.}$$

La expresión precedente contiene $2^k + 2^k = 2 \cdot 2^k = 2^{k+1}$ sumandos distintos, cada uno de los cuales representa una asignación diferente de valores de verdad a P_1, P_2, $\ldots$, P_{k+1}. Cada Q_iP_{k+1} y cada $Q_i \sim P_{k+1}$, es una diferente Q'_i, donde las 2^{k+1} Q'_i representan todas las asignaciones posibles de valores de verdad a P_1, P_2, $\ldots$, P_{k+1}. Luego $\vdash (Q'_1 \vee Q'_2 \vee \ldots \vee Q'_{2k+1})$. El Metateorema VIII ahora se sigue por inducción débil.

Ahora demostramos que si la asignación de valores de verdad representada por Q_j asigna **T** a S, entonces $\vdash Q_j \supset S$. Esto se probará estableciendo un resultado un poco más general, que incluye también el caso en que la asignación de valores de verdad asigna **F** a S, en vez de lo anterior. Este hecho se enuncia y se presenta como nuestro siguiente metateorema.

METATEOREMA IX. *Si Q_j representa cualquier asignación posible de valores de verdad a n símbolos proposicionales P_1, P_2, $\ldots$, P_n y S es cualquier wff sin componentes que no sean los $P_i (1 \leq i \leq n)$, entonces, si la asignación de valores de verdad representada por Q_j asigna* **T** *a S, entonces $\vdash Q_j \supset S$; y si la asignación de valores de verdad representada por Q_j asigna una* **F** *a S, entonces $\vdash Q_j \supset \sim S$.*

Prueba: Se usa inducción fuerte sobre el número de símbolos de S, contando cada aparición de $\cdot$, de $\sim$, y de cualquier P_i como un solo símbolo.

α) Si $n = 1$, S debe ser un solo símbolo, y como es una *wff* debe ser un P_i $(1 \leq i \leq n)$.

CASO 1. Q_j asigna una **T** a S, es decir, a P_i. Luego P_i y no $\sim P_i$ debe ser un factor de Q_j. Por MT V, $\vdash Q_j \equiv P_iR$, donde R es una conjunción de todos los factores de Q_j excepto P_i. Ahora se argumenta como sigue:

$$\vdash P_iR \supset P_i \quad \text{Ax. 2}$$
$$\vdash Q_j \supset P_i \quad \text{MT IV, Cor.}$$

que es $\vdash Q_j \supset S$.

CASO 2. Q_j asigna una **F** a S, esto es a P_i. Luego $\sim P_i$ debe ser un factor de Q_j. Por MT V, $\vdash Q_j \equiv \sim P_iR$, donde R es una conjunción de todos los factores de Q_j, excepto $\sim P_i$. Ahora se argumenta:

$$\begin{array}{ll} \vdash \sim P_i R \supset \sim P_i & \text{Ax. 2} \\ \vdash Q_j \supset \sim P_i & \text{MT IV, Cor.} \end{array}$$

que es $\vdash Q_j \supset \sim S$.

β) Supóngase verdadero el Metateorema para toda S que contenga cualquier número $k < n$ de símbolos. Ahora considérese una S que contenga n (> 1) símbolos. La *wff* S es o $S_1 \cdot S_2$ o $\sim S_3$.

CASO 1. S es $S_1 \cdot S_2$.

Subcaso A: Q_j asigna **T** a S. Aquí Q_j debe asignar una **T** a S_1 y una **T** a S_2. Dado que S_1, S_2 contienen menos de n símbolos cada una, argumentamos como sigue:

$$\begin{array}{ll} \vdash Q_j \supset S_1 & \text{por la hipótesis del caso } \beta \\ \vdash Q_j \supset S_2 & \text{por la hipótesis del caso } \beta \\ \vdash Q_j \supset S_1 \cdot S_2 & \text{DR 8} \end{array}$$

que es $\vdash Q_j \supset S$.

Subcaso B: Q_j asigna una **F** a S. Aquí Q_j debe asignar una **F** a S_1 o una **F** a S_2. Si se asigna a S_1, entonces $\vdash Q_j \supset \sim S_1$ por la hipótesis del caso β, y luego por DR 12 $\vdash Q_j \supset \sim(S_1 \cdot S_2)$ que es $\vdash Q_j \supset \sim S$. Si se asigna a S_2 entonces $\vdash Q_j \supset \sim S_2$ por la hipótesis del caso β, y luego por DR 13 $\vdash Q_j \supset \sim(S_1 \cdot S_2)$ que es $\vdash Q_j \supset \sim S$.

CASO 2. S es $\sim S_3$.

Subcaso A: Q_j asigna **T** a S. Aquí Q_j debe asignar una **F** a S_3. Luego, por la hipótesis del caso β, $\vdash Q_j \supset \sim S_3$ que es $\vdash Q_j \supset S$.

Subcaso B: Q_j asigna una **F** a S. Aquí Q_j debe asignar una **T** a S_3. Luego, por la hipótesis del caso β, $\vdash Q_j \supset S_3$. Pero $\vdash S_3 \supset \sim\sim S_3$ por el Teorema 4, de modo que por DR 6 tenemos $\vdash Q_j \supset \sim\sim S_3$, que es $\vdash Q_j \supset \sim S$.

El metateorema IX ahora se sigue por inducción fuerte.

La completud deductiva del sistema se sigue fácilmente y puede probarse como:

METATEOREMA X. *R.S. es deductivamente completo (esto es, si S es una tautología entonces $\vdash S$).*

Prueba: Si S es una tautología, entonces cada posible asignación de valores de verdad a sus componentes $P_1, P_2, \ldots, P_n$, debe asignar **T** a S. Luego por MT IX:

$$\begin{array}{l} \vdash Q_1 \supset S \\ \vdash Q_2 \supset S \\ \ldots\ldots\ldots \\ \vdash Q_{2^n} \supset S \end{array}$$

donde $Q_1, Q_2, \ldots, Q_{2^n}$ representan todas las posibles asignaciones de valores de verdad a $P_1, P_2, \ldots, P_n$. Ahora, usando $2^n - 1$ la DR 10, tenemos

$$\vdash (Q_1 \vee Q_2 \vee \ldots \vee Q_{2^n}) \supset S$$

y por el MT VIII,

$$\vdash (Q_1 \vee Q_2 \vee \ldots \vee Q_{2^n})$$

De éstas deducimos $\vdash S$ por R1, lo que completa nuestra prueba del Metateorema X.

El *problema decisorio* para cualquier sistema deductivo es el problema de enunciar un criterio efectivo para decidir si un enunciado o una fórmula bien formada es o no es un teorema del sistema. En vista de la analiticidad y completud deductiva de R.S. (Metateorema II y X), el método de las tablas de verdad constituye una solución del problema de decisión o decisorio. Las tablas de verdad nos permiten decidir efectivamente si una *wff* es o no es una tautología. Por el MT II, *sólo* las tautologías son teoremas, y por el MT X, *todas* las tautologías son teoremas. Luego, las tablas de verdad nos permiten decidir con efectividad si una *wff* cualquiera es o no es un teorema. Más aún, las pruebas hasta el MT X, inclusive, no sólo nos aseguran que para toda *wff* tautológica existe una demostración, sino que prescriben de manera efectiva un método para construir su demostración. La demostración construida siguiendo las instrucciones contenidas en la prueba de la completud deductiva serán, en general, más largas que una que se descubre gracias al ingenio y la inventiva. De acuerdo. Pero es significativo e importante que por el uso de la receta contenida en las pruebas hasta la del MT X, inclusive, puede llevarse a cabo una demostración dentro del sistema logístico, para cualquier tautología *sin necesidad de ingenio o inventiva*. La solución efectiva del problema decisorio, para el sistema, lo garantiza.

Es claro, a partir de lo anterior, que cualquier argumento cuya validez es posible establecer por el uso de las tablas de verdad puede probarse válido en R.S. En el Cap. 3 se pretendía que todo argumento tal podía probarse como válido usando la lista de diecinueve Reglas de Inferencia aumentada por los principios de la Prueba Condicional y la Prueba Indirecta. Ahora estamos en posición de justificar esa afirmación, que equivale a decir que el método de deducción presentado en el Cap. 3 es deductivamente completo. Esto podemos hacerlo mostrando que todo argumento cuya validez puede probarse en R.S. también puede probarse válido por los métodos del Cap. 3.

Considérese cualquier argumento $P_1, \ldots, P_n \therefore Q$ cuya validez puede probarse en R.S. Decir que hay una demostración en R.S. de su validez, es decir, que hay una demostración en R.S. para la regla de inferencia derivada $P_1, \ldots, P_n \vdash Q$. Por n aplicaciones del Teorema de Deducción, Exportación y la Regla de Reemplazo, tenemos $\vdash P \supset Q$ donde P es una conjunción de $P_1 \ldots, P_n$. Por la analiticidad de R.S., $P \supset Q$ es una tautología de tabla de verdad, luego $P \cdot {\sim}Q$ es una contradicción. Ahora, hay una prueba formal de validez para el argumento

$$(1) \qquad P_1, \ldots, P_n, {\sim}Q \quad \therefore P \cdot {\sim}Q$$

usando los métodos del Cap. 3 (por uso repetido del principio de Conjunción). Luego, hay una prueba formal que utiliza los métodos del Cap. 3, para el argumento

$$(2) \qquad P_1, \ldots, P_n, {\sim}Q \quad \therefore N$$

donde N es una forma normal disyuntiva[9] de la fórmula $P \cdot {\sim}Q$, pues las equivalencias incluidas entre las Reglas de Inferencia del Cap. 3 son suficientes para permitir la deducción de la fórmula normal disyuntiva de cualquier renglón de una prueba formal.

Dado que $P \cdot {\sim}Q$ es una contradicción, N es una disyunción en la que todo disyunto contiene una contradicción como un conjunto. Luego por utilización reiterada de las variantes de prueba formal de validez para

$$q \vee [(p \cdot {\sim}p) \cdot r] \quad \therefore q$$

la prueba formal de validez para (2) se puede extender a una prueba formal de validez para

$$(3) \qquad P_1, \ldots, P_n, {\sim}Q \quad \therefore N_1$$

donde N_1 es un solo disyunto de N. Si N_1 no es en sí misma una contradicción explícita, es una conjunción que contiene una con-

[9] Véase el Apéndice A, Págs. 335-342

tradicción como conjunto. Luego por Com. y Simp. (y posiblemente Asoc.), la prueba formal de validez para (3) puede extenderse y proveer una deducción de una contradicción explícita del conjunto de premisas $P_1, \ldots, P_n, \sim Q$. Y esta deducción constituye una Prueba Indirecta de validez para el argumento original $P_1, \ldots, P_n \therefore Q$. Por lo tanto, cualquier argumento que puede probarse como válido en R.S. se puede probar válido por los métodos del Cap. 3, lo que es suficiente para mostrar que el método de deducción presentado en el Cap. 3 es también un sistema de la lógica deductivamente completo.[10]

---

[10] La prueba precedente es una adaptación del artículo "Completeness of Copi's Method of Deduction", por John Thomas Canty, publicado en *Notre Dame Journal of Formal Logic*, Vol. IV (1963), Págs. 142-144. Véase también M.C. Bradley, "Copi's Method of Deduction Again", de la misma publicación, Vol. XII (1971), Págs. 454-458.

8

Sistemas y Notaciones Alternativos

8.1. Sistemas Alternativos de Lógica

La frase "sistemas alternativos de lógica" puede entenderse en tres sentidos diferentes. Son paralelos a los tres sentidos de la frase "sistemas alternativos de geometría", y se les puede explicar de la manera más conveniente por analogía con aquéllos. Podemos hablar de la geometría plana euclidiana y la geometría del espacio euclidiana como sistemas alternativos en el sentido de que la primera puede estudiarse independientemente de la segunda, y son en efecto diferentes en cuanto que la segunda *incluye más* que la primera. De manera análoga, podemos hablar de un Cálculo Proposicional y de un Cálculo Funcional como "sistemas alternativos de lógica" en cuanto que el primero puede estudiarse independientemente del segundo, y que el segundo *incluye más* que el primero —pues un Cálculo de Funciones contiene todas las tautologías y reglas del Cálculo Proposicional, *además* de los axiomas de la Cuantificación, Reglas y Teoremas—. No nos vamos a ocupar de *este* sentido de sistema alternativo en el presente capítulo.

Un segundo sentido es aquel en el que se puede decir de la geometría euclidiana y la riemanniana (o lobachevskiana) que son sistemas alternativos. Son alternativos en el sentido de que, aunque puedan poseer algunos teoremas en común cada una posee teoremas no incluidos en la otra. Así también, de manera paralela a esta situación de la geometría, tenemos en la lógica sistemas alternativos de lógica que exhiben la misma clase de diferencias. Un sistema ordinario "bivaluado" de la lógica cuyas fórmulas en interpretación son *verdaderas* o *falsas*, se puede contrastar con los sistemas "tri" o "multivaluados" de la lógica cuyas fórmulas se supone que —en la interpretación— toman tres o $n > 3$ "valores de verdad" diferentes.

Los sistemas de lógica, alternativos en este sentido, han experimentado un gran desarrollo, primero por los trabajos de Jan Lukasiewicz, en Polonia, e independientemente por E. L. Post en EE. UU., y en fecha más reciente por J. B. Rosser y A. R. Turquette.[1] Estudiar estos sistemas rebasa los propósitos de este libro. No es *este* sentido de sistemas alternativos el que nos ocupará en el presente capítulo.

El tercer sentido en el que se puede hablar de sistemas alternativos de geometría es en el que se suponen diferentes bases axiomáticas de las cuales, sin embargo, se deducen idénticamente los mismos teoremas. Así, se han construido muchos conjuntos distintos de axiomas para la geometría euclidiana, y todos dan los mismos teoremas. En sistemas alternativos de esta clase, se toman términos diferentes como términos indefinidos o primitivos y se suponen diversas fórmulas como axiomas o postulados. El término que es indefinido en un sistema puede ser definido por otros términos primitivos en el otro sistema, y lo que en uno se supone como axioma puede ser deducido como teorema a partir de los axiomas del otro —en el cual los axiomas corresponden a teoremas del primero—. Es *éste* el sentido de sistemas alternativos que se estudia en el presente capítulo.

Las verdades lógicas cuya sistematización estamos considerando son tautologías función de verdad. Todo sistema adecuado por completo a su expresión y desarrollo debe ser *funcionalmente completo*, *analítico*, y *deductivamente completo* en los sentidos en que R.S. se probó que posee estas propiedades en los Metateoremas I, II y X del capítulo anterior. Cualquier sistema tal será llamado un *Sistema Modelo de la Lógica*, y cualquier sistema de axiomas para la lógica será una alternativa genuina y aceptable de R.S. si y sólo si es un Sistema Modelo. Hay muchos diferentes Sistemas Modelos, diferentes en cuanto que suponen fórmulas distintas como axiomas. No obstante, son equivalentes, primero, en que pueden expresar —en sus interpretaciones normales— todas las funciones de verdad; segundo, en que incluyen *todas* las tautologías como teoremas y tercero, en que *todos* sus teoremas son tautologías. Un sistema

[1] Ver J. Lukasiewicz; "O logice trojwartosciowej", *Ruch Filozoficzny* (Lwow), Vol. 5 (1920), Págs. 169–171.

E. L. Post, "Introduction to a General Theory of Elementary Propositions", *American Journal of Mathematics*, Vol. 43 (1921), Págs. 163–185.

J. B. Rosser, "On the Many-Valued Logics", *American Journal of Physics*, Vol. 9 (1941), Págs. 207–212.

J. B. Rosser y A. R. Turquette, "Axiom Schemes for M-Valued Propositional Calculi", *Journal of Symbolic Logic*, Vol. 10 (1945) Págs. 61-62, y *Many-Valued Logics*, Amsterdam, 1952.

Véase también: Alan Ross Anderson *et al.*, (entre otros) "Proceedings of a Colloquium on Modal and Many-Valued Logics", *Acta Philosophica Fennica*, Fasc. XVI (1963); y A. A. Zinov'ev, *Philosophical Problems of Many-Valued Logic*", editado y traducido por G. Küng y D. D. Comey, Dordrecht-Holanda, 1963.

alternativo tal se probará que es un *Sistema Modelo* en la sección siguiente.

8.2. El Sistema de Hilbert-Ackermann

El sistema de Hilbert-Ackermann para el cálculo proposicional, como reconocieron D. Hilbert y W. Ackermann "es en esencia debido a Whitehead y Russell (*Principia Mathematica*, primera edición)". Sus símbolos primitivos son una infinidad de letras con y sin subíndices:

$$\begin{array}{ccccc} \mathbf{A} & \mathbf{A_1} & \mathbf{A_2} & \mathbf{A_3} & \ldots \\ \mathbf{B} & \mathbf{B_1} & \mathbf{B_2} & \mathbf{B_3} & \ldots \\ \mathbf{C} & \mathbf{C_1} & \mathbf{C_2} & \mathbf{C_3} & \ldots \\ \mathbf{D} & \mathbf{D_1} & \mathbf{D_2} & \mathbf{D_3} & \ldots \end{array}$$

que en su interpretación normal expresan proposiciones no compuestas, y además de los paréntesis, tiene los dos símbolos operadores "**∼**" y "**v**" (designados en nuestro metalenguaje por "∼" y "v"), cuyas interpretaciones normales son las operaciones de negación y disyunción débil (o inclusiva). Continuamos usando los símbolos "*P*", "*Q*", "*R*", "*S*", . . ., con y sin subíndices, en nuestro metalenguaje, para denotar fórmulas bien formadas de H.A. (el sistema de lógica de Hilbert-Ackermann). La noción de una *wff* de H.A. se define recursivamente a continuación:

Regla Recursiva para las wff en H.A.

1. Toda letra, sola, de H.A. es una *wff*.
2. Si P es una *wff* entonces $\sim(P)$ es una *wff*.
3. Si P y Q son *wff* entonces $(P)\mathrm{v}(Q)$ es una *wff*.

(Ninguna fórmula de H.A. será considerada como *wff*, a menos que lo sea por esta definición.)

Los símbolos "⊃", "·", "≡" se definen *sintácticamente* para nuestro metalenguaje por medio de

$$\begin{array}{ll} P \supset Q & = \mathrm{df} \sim P \mathrm{v}\, Q \\ P\cdot Q & = \mathrm{df} \sim(\sim P \mathrm{v} \sim Q) \\ PQ & = \mathrm{df}\, P\cdot Q \\ P \equiv Q & = \mathrm{df}\, (P \supset Q)(Q \supset P) \end{array}$$

Continuaremos usando los mismos convenios respecto a los paréntesis, que se adoptaron en el capítulo precedente.

Se suponen cuatro (patrones de) axiomas o postulados en H.A.

P 1. $(P \vee P) \supset P$
P 2. $P \supset (P \vee Q)$
P 3. $(P \vee Q) \supset (Q \vee P)$
P 4. $(P \supset Q) \supset [(R \vee P) \supset (R \vee Q)]$

Cada una de estas expresiones sintácticas denota una infinidad de *wff* de nuestro lenguaje objeto H.A., tal como en el desarrollo metalógico de R.S.

Finalmente, se supone una sola regla de inferencia, que podemos enunciar como

R′ 1. De P y $P \supset Q$, inferir Q.

Hay que darse cuenta que R′ 1 es diferente de R 1, porque R′ 1 legitimiza argumentos dentro de H.A. que son de la forma

$$\begin{array}{l} P \\ \sim P \vee Q \\ Q \end{array}$$

mientras que R 1 legitimiza argumentos en R.S. que son de la forma

$$\begin{array}{l} P \\ \sim(P \sim Q) \\ Q \end{array}$$

y éstos son claramente diferentes. Se puede hacer más fuerte el contraste escribiéndolos como

R 1. De P y $\sim (P \sim Q)$, inferir Q.

R′ 1. De P y $\sim P \vee Q$, inferir Q.

Por el MT IV, Corolario, y el Teorema 29 de R.S. cualquier *wff* en R.S. que por R 1 se sigue de otras dos *wff* debe también seguirse por R′ 1 y recíprocamente. Pero esto no se puede suponer verdadero de H.A. hasta que se haya *probado.*

Una "demostración en H.A." de la validez de un argumento de premisas $P_1, P_2, \ldots, P_n$ y conclusión Q se define como una sucesión de *wff* $S_1, S_2, \ldots, S_t$ (de H.A.) cada una de las cuales o es un postulado P 1, P 2, P 3 o P 4, o una P_i $(1 \leq i \leq n)$ o se sigue de dos S precedentes por R′ 1 y tal que S_t es Q. El hecho de que hay una demostración de esta índole en H.A. se escribe

$$P_1, P_2, \ldots, P_n \vdash_{\mathrm{HA}} Q$$

De manera semejante, el que la fórmula P sea un teorema de H.A. se escribe

$$\vdash_{\overline{\text{HA}}} P$$

que afirma que hay una sucesión de *wff* $S_1, S_2, \ldots, S_t$ (de H.A.), cada una de las cuales o es un postulado P 1, P 2, P 3 o P 4, o se sigue de dos precedentes S por R′ 1, y tal que S_t es P.

La completud funcional de H.A. es fácil de establecer. (Fue el Ejercicio 1 de la Sec. 7.2 del capítulo precedente.) Una prueba de la analiticidad de H.A. se da fácilmente usando tablas de verdad para mostrar que cualquier postulado P 1, P 2, P 3, P 4 es una tautología, y luego probando que cualquier *wff* que se sigue de tautologías por aplicaciones reiteradas de R′ 1 también debe ser tautológica.

La independencia de los postulados de H.A. se establece por los siguientes modelos.

Para probar que el Postulado 1 es independiente usamos el modelo de tres elementos {**0**, **1**, **2**} de los que **0** es el elemento designado, y los valores asignados a las *wff* lo son de acuerdo con las tablas:

P	$\sim P$
0	**2**
1	**1**
2	**0**

P	Q	$P \vee Q$	$P \supset Q$
0	**0**	**0**	**0**
0	**1**	**0**	**1**
0	**2**	**0**	**2**
1	**0**	**0**	**0**
1	**1**	**0**	**0**
1	**2**	**1**	**1**
2	**0**	**0**	**0**
2	**1**	**1**	**0**
2	**2**	**2**	**0**

Para probar que el Postulado 2 es independiente usamos el modelo de tres elementos {**0**, **1**, **2**}, con elemento designado **0**, y las tablas:

P	$\sim P$
0	**1**
1	**0**
2	**2**

P	Q	$P \vee Q$	$P \supset Q$
0	**0**	**0**	**0**
0	**1**	**0**	**1**
0	**2**	**0**	**1**
1	**0**	**0**	**0**
1	**1**	**1**	**0**
1	**2**	**1**	**0**
2	**0**	**0**	**0**
2	**1**	**1**	**1**
2	**2**	**1**	**1**

Para probar la independencia del postulado 3 usamos el modelo de tres elementos {**0**, 1, 2} con **0** designado, y las tablas:

P	$\sim P$
0	2
1	0
2	1

P	Q	$P \vee Q$	$P \supset Q$
0	0	0	0
0	1	0	2
0	2	0	2
1	0	0	0
1	1	1	0
1	2	0	0
2	0	0	0
2	1	2	1
2	2	2	0

Para probar la independencia del Postulado 4 usamos el modelo de cuatro elementos {**0**, 1, 2, 3} con **0** designado y las tablas:

P	$\sim P$
0	1
1	0
2	3
3	0

P	Q	$P \vee Q$	$P \supset Q$
0	0	0	0
0	1	0	1
0	2	0	2
0	3	0	3
1	0	0	0
1	1	1	0
1	2	2	0
1	3	3	0
2	0	0	0
2	1	2	3
2	2	2	0
2	3	0	3
3	0	0	0
3	1	3	0
3	2	0	0
3	3	3	0

La completud deductiva de R.S. se probó en el Cap. 7 mostrando que todas las tautologías eran deducibles por su regla R 1, a partir de sus tres axiomas. Podría pensarse que para probar la completud deductiva de H.A. bastaría deducir los tres axiomas de R.S. como teoremas de H.A. y la regla R 1 de R.S. como regla derivada de H.A. ¿Pues no mostraría eso que todas las tautologías son deducibles, vía esos tres teoremas y una regla derivada, a partir de los cuatro postulados de H.A., por su regla R′ 1? Esta no es una cuestión simplemente retórica. La respuesta, de hecho, es negativa. La dificultad es que los sistemas H.A. y R.S. tienen símbolos primitivos diferentes.

A pesar de que R.S. y H.A. *son* deductivamente completos, no todas las tautologías pueden derivarse por la regla R 1 de R.S. a partir de los tres axiomas de R.S., *cuando se considera a éstos como construidos o formulados en la base primitiva de H.A., y no en la de R.S.*, esto es, con $\sim$ y v como símbolos indefinidos en lugar de $\sim$ y $\cdot$. Esto puede mostrarse probando que la tautología $P \vee \sim P$ es independiente de las formulaciones de H.A. de los tres axiomas de R.S.: $\sim [P \cdot \sim (P \cdot P)]$, $\sim [(P \cdot Q) \cdot \sim P]$ y $\sim \{\sim (P \cdot \sim Q) \cdot \sim \sim [\sim (Q \cdot R) \cdot \sim \sim (R \cdot P)]\}$, en el sentido de no ser derivable de ellas por la formulación de H.A. de la Regla de R.S.: $P, \sim (P \cdot \sim Q) \vdash_{\text{HA}} Q$.

Para probar que una tautología especificada no puede probarse en un sistema de axiomas dado se procede como para probar que un axioma de un sistema es independiente de los otros axiomas. Se considera la tautología especificada como si fuera un axioma del que se fuera a probar la independencia, y se intenta mostrar que no se sigue de los (otros) axiomas del sistema por la regla dada del sistema, tal como se describió en la Pág. 226.

Para probar la independencia (no derivabilidad) de la tautología $P \vee \sim P$ usamos el modelo de seis elementos {**0**, **1**, **2**, **3**, **4**, **5**}, con las tablas para $\sim$ y v (y la tabla de derivación para $\cdot$), dadas a continuación.

P	Q	$P \vee Q$	$\sim P$	$\sim Q$	$\sim P \vee \sim Q$	$P \cdot Q$ $\sim(\sim P \vee \sim Q)$
0	**0**	**0**	**5**	**5**	**5**	**0**
0	**1**	**0**	**5**	**5**	**5**	**0**
0	**2**	**3**	**5**	**4**	**5**	**0**
0	**3**	**3**	**5**	**1**	**0**	**5**
0	**4**	**0**	**5**	**0**	**0**	**5**
0	**5**	**0**	**5**	**0**	**0**	**5**
1	**0**	**0**	**5**	**5**	**5**	**0**
1	**1**	**0**	**5**	**5**	**5**	**0**
1	**2**	**3**	**5**	**4**	**5**	**0**
1	**3**	**3**	**5**	**1**	**0**	**5**
1	**4**	**0**	**5**	**0**	**0**	**5**
1	**5**	**0**	**5**	**0**	**0**	**5**
2	**0**	**3**	**4**	**5**	**5**	**0**
2	**1**	**3**	**4**	**5**	**5**	**0**
2	**2**	**3**	**4**	**4**	**5**	**0**
2	**3**	**3**	**4**	**1**	**0**	**5**
2	**4**	**3**	**4**	**0**	**0**	**5**
2	**5**	**3**	**4**	**0**	**0**	**5**
3	**0**	**3**	**1**	**5**	**0**	**5**
3	**1**	**3**	**1**	**5**	**0**	**5**
3	**2**	**3**	**1**	**4**	**0**	**5**

3	3	3	1	1	0	5
3	4	3	1	0	0	5
3	5	3	1	0	0	5
4	0	0	0	5	0	5
4	1	0	0	5	0	5
4	2	3	0	4	0	5
4	3	3	0	1	0	5
4	4	5	0	0	0	5
4	5	5	0	0	0	5
5	0	0	0	5	0	5
5	1	0	0	5	0	5
5	2	3	0	4	0	5
5	3	3	0	1	0	5
5	4	5	0	0	0	5
5	5	5	0	0	0	5

En este modelo de tres elementos **0**, **1**, **2**, los tres son elementos designados. La característica de tomar valores designados es hereditaria con respecto a la regla: De P y $\sim(P \cdot \sim Q)$ inferir Q: y las tres formulaciones en H.A. de los axiomas de R.S. sólo toman valores designados. Pero para el valor 2 para P, tenemos $P \vee \sim P = 2 \vee \sim 2 = 2 \vee 4 = 3$ que *no* es un valor designado.[2]

Para probar la completud deductiva de H.A. primero establecemos algunos teoremas, reglas derivadas y metateoremas para este sistema.

TEOREMA 1. $\vdash_{\overline{HA}} (Q \supset R) \supset [(P \supset Q) \supset (P \supset R)]$

Demostración: 1. $(Q \supset R) \supset [(\sim P \vee Q) \supset (\sim P \vee R)]$ — P 4
2. $(Q \supset R) \supset [(P \supset Q) \supset (P \supset R)$ — df.

DR 1. $P \supset Q, Q \supset R \vdash_{\overline{HA}} P \supset R$

Prueba: 1. $(Q \supset R) \supset [(P \supset Q) \supset (P \supset R)]$ — Teo. 1
2. $Q \supset R$ — premisa
3. $(P \supset Q) \supset (P \supset R)$ — R′ 1
4. $P \supset Q$ — premisa
5. $P \supset R$ — R′ 1

TEOREMA 2. $\vdash_{\overline{HA}} P \supset (Q \vee P)$

Prueba: 1. $P \supset (P \vee Q)$ — P 2
2. $(P \vee Q) \supset (Q \vee P)$ — P 3
3. $P \supset (Q \vee P)$ — DR 1

[2] Véase Henry Hiz, "A Warning About Translating Axioms", (Una advertencia respecto a la traducción de los axiomas), *American Mathematical Monthly*, Vol. 65 (1958) Págs. 613 y sigs.; Thomas W. Scharle, "Are Definitions Eliminable in Formal Systems" (Abstract), *The Journal of Symbolic Logic*, Vol. 35 (1970) Págs. 182 y sigs.; y Alonzo Church, *Introduction to Mathematical Logic*, Princeton (1956) Págs. 125 a 128. En este tema me ha sido heneficiosa la correspondencia que he tenido con el profesor Jean Porte y la discusión sostenida con el profesor Anjan Shukla.

DR 2. $Q \supset R \vdash_{\mathrm{HA}} (P \vee Q) \supset (P \vee R)$

Demostración:	1. $(Q \supset R) \supset [(P \vee Q) \supset (P \vee R)]$	P 4
	2. $Q \supset R$	premisa
	3. $(P \vee Q) \supset (P \vee R)$	R′ 1

TEOREMA 3. $\vdash_{\mathrm{HA}} P \supset P$

Prueba:	1. $P \supset (P \vee P)$	P 2
	2. $(P \vee P) \supset P$	P 1
	3. $P \supset P$	DR 1

DR 3. $P \vee Q \vdash_{\mathrm{HA}} Q \vee P$

Demostración:	1. $(P \vee Q) \supset (Q \vee P)$	P 3
	2. $P \vee Q$	premisa
	3. $Q \vee P$	R′ 1

TEOREMA 4. $\vdash_{\mathrm{HA}} P \vee \sim P$

Prueba:	1. $P \supset P$	Teo. 3
	2. $\sim P \vee P$	df.
	3. $P \vee \sim P$	DR 3

TEOREMA 5. $\vdash_{\mathrm{HA}} P \supset \sim\sim P$

Prueba:	1. $\sim P \vee \sim\sim P$	Teo. 4
	2. $P \supset \sim\sim P$	df.

TEOREMA 6. $\vdash_{\mathrm{HA}} \sim\sim P \supset P$

Prueba:	1. $\sim P \supset \sim\sim\sim P$	Teo. 5
	2. $(P \vee \sim P) \supset (P \vee \sim\sim\sim P)$	DR 2
	3. $P \vee \sim P$	Teo. 4
	4. $P \vee \sim\sim\sim P$	R′ 1 (2, 3)
	5. $\sim\sim\sim P \vee P$	DR 3
	6. $\sim\sim P \supset P$	df.

TEOREMA 7. $\vdash_{\mathrm{HA}} [P \vee (Q \vee R)] \supset [Q \vee (P \vee R)]$

Prueba:	1. $R \supset (P \vee R)$	Teo. 2
	2. $(Q \vee R) \supset [Q \vee (P \vee R)]$	DR 2
	3. $[P \vee (Q \vee R)] \supset \{P \vee [Q \vee (P \vee R)]\}$	DR 2
	4. $\{P \vee [Q \vee (P \vee R)]\} \supset \{[Q \vee (P \vee R)] \vee P\}$	P 3
	5. $[P \vee (Q \vee R)] \supset \{[Q \vee (P \vee R)] \vee P\}$	DR 1 (3, 4)
	6. $P \supset (P \vee R)$	P 2
	7. $(P \vee R) \supset [Q \supset (P \vee R)]$	Teo. 2
	8. $P \supset [Q \supset (P \vee R)]$	DR 1 (6, 7)
	9. $\{[Q \vee (P \vee R)] \vee P\} \supset$ $\{[Q \vee (P \vee R)] \vee [Q \vee (P \vee R)]\}$	DR 2 (8)

10. $\{[Q \vee (P \vee R)] \vee [Q \vee (P \vee R)]\} \supset$ $[Q \vee (P \vee R)]$	P 1
11. $\{[Q \vee (P \vee R)] \vee P\} \supset [Q \vee (P \vee R)]$	DR 1 (9, 10)
12. $[P \vee (Q \vee R)] \supset [Q \vee (P \vee R)]$	DR 1 (5, 11)

TEOREMA 8. $\vdash_{\overline{HA}} [P \vee (Q \vee R)] \supset [(P \vee Q) \vee R]$

Prueba:	
1. $(Q \vee R) \supset (R \vee Q)$	P 3
2. $[P \vee (Q \vee R)] \supset [P \vee (R \vee Q)]$	DR 2
3. $[P \vee (R \vee Q)] \supset [R \vee (P \vee Q)]$	Teo. 7
4. $[P \vee (Q \vee R)] \supset [R \vee (P \vee Q)]$	DR 1 (2, 3)
5. $[R \vee (P \vee Q)] \supset [(P \vee Q) \vee R]$	P 3
6. $[P \vee (Q \vee R)] \supset [(P \vee Q) \vee R]$	DR 1 (4, 5)

TEOREMA 9. $\vdash_{\overline{HA}} [(P \vee Q) \vee R] \supset [P \vee (Q \vee R)]$

Prueba:	
1. $[(P \vee Q) \vee R] \supset [R \vee (P \vee Q)]$	P 3
2. $[R \vee (P \vee Q)] \supset [P \vee (R \vee Q)]$	Teo. 7
3. $[(P \vee Q) \vee R] \supset [P \vee (R \vee Q)]$	DR 1
4. $[P \vee (R \vee Q)] \supset [(P \vee R) \vee Q]$	Teo. 8
5. $[(P \vee Q) \vee R] \supset [(P \vee R) \vee Q]$	DR 1 (3, 4)
6. $[(P \vee R) \vee Q] \supset [Q \vee (P \vee R)]$	P 3
7. $[(P \vee Q) \vee R] \supset [Q \vee (P \vee R)]$	DR 1 (5, 6)
8. $[Q \vee (P \vee R)] \supset [P \vee (Q \vee R)]$	Teo. 7
9. $[(P \vee Q) \vee R] \supset [P \vee (Q \vee R)]$	DR 1 (7, 8)

TEOREMA 10. $\vdash_{\overline{HA}} P \supset [Q \supset (PQ)]$

Prueba:	
1. $(\sim P \vee \sim Q) \vee \sim(\sim P \vee \sim Q)$	Teo. 4
2. $[(\sim P \vee \sim Q) \vee \sim(\sim P \vee \sim Q)] \supset$ $\{\sim P \vee [\sim Q \vee \sim(\sim P \vee \sim Q)]\}$	Teo. 9
3. $\sim P \vee [\sim Q \vee \sim(\sim P \vee \sim Q)]$	R′ 1
4. $P \supset [Q \supset (PQ)]$	df.

DR 4. $P, Q \vdash_{\overline{HA}} PQ$

Prueba:	
1. $P \supset [Q \supset (PQ)]$	Teo. 10
2. P	premisa
3. $Q \supset (PQ)$	R′ 1
4. Q	premisa
5. PQ	R′ 1

Los siguientes tres teoremas se rigen por la DR 4 de los Teoremas 5 y 6, los Teoremas 8 y 9 y el Teorema 3, respectivamente:

TEOREMA 11. $\vdash_{\overline{HA}} P \equiv \sim\sim P$

TEOREMA 12. $\vdash_{\overline{HA}} [P \vee (Q \vee R)] \equiv [(P \vee Q) \vee R]$

TEOREMA 13. $\vdash_{\overline{HA}} P \equiv P$

DR 5. $P \supset Q \vdash_{HA} \sim Q \supset \sim P$

Prueba:	1. $P \supset Q$	premisa
	2. $Q \supset \sim\sim Q$	Teo. 5
	3. $P \supset \sim\sim Q$	DR 1
	4. $\sim P \vee \sim\sim Q$	df.
	5. $\sim\sim Q \vee \sim P$	DR 3
	6. $\sim Q \supset \sim P$	df.

TEOREMA 14. $\vdash_{HA} (PQ) \supset P$

Prueba:	1. $\sim P \supset (\sim P \vee \sim Q)$	P 2
	2. $\sim(\sim P \vee \sim Q) \supset \sim\sim P$	DR 5
	3. $\sim\sim P \supset P$	Teo. 6
	4. $\sim(\sim P \vee \sim Q) \supset P$	DR 1
	5. $(PQ) \supset P$	df.

TEOREMA 15. $\vdash_{HA} (PQ) \supset Q$

Prueba:	1. $(\sim Q \vee \sim P) \supset (\sim P \vee \sim Q)$	P 3
	2. $\sim(\sim P \vee \sim Q) \supset \sim(\sim Q \vee \sim P)$	DR 5
	3. $(PQ) \supset (QP)$	df.
	4. $(QP) \supset Q$	Teo. 14
	5. $(PQ) \supset Q$	DR 1

Las dos reglas derivadas siguientes son consecuencia de los dos teoremas precedentes, por R′ 1.

DR 6. $PQ \vdash_{HA} P$

DR 7. $PQ \vdash_{HA} Q$

DR 8. $P \equiv Q \vdash_{HA} \sim P \equiv \sim Q$

Prueba:	1. $P \equiv Q$	premisa
	2. $(P \supset Q)(Q \supset P)$	df.
	3. $P \supset Q$	DR 6
	4. $\sim Q \supset \sim P$	DR 5
	5. $Q \supset P$	DR 7 (2)
	6. $\sim P \supset \sim Q$	DR 5
	7. $(\sim P \supset \sim Q)(\sim Q \supset \sim P)$	DR 4
	8. $\sim P \equiv \sim Q$	df.

DR 9. $P \equiv Q, Q \equiv R \vdash_{HA} P \equiv R$

Prueba:	1. $P \equiv Q$	premisa
	2. $(P \supset Q)(Q \supset P)$	df.
	3. $P \supset Q$	DR 6
	4. $Q \supset P$	DR 7

	5. $Q \equiv R$	premisa
	6. $(Q \supset R)(R \supset Q)$	df.
	7. $Q \supset R$	DR 6
	8. $R \supset Q$	DR 7
	9. $P \supset R$	DR 1 (3, 7)
	10. $R \supset P$	DR 1 (8, 4)
	11. $(P \supset R)(R \supset P)$	DR 4
	12. $P \equiv R$	df.

TEOREMA 16. $\vdash_{\overline{HA}} P \equiv (P \vee P)$

Prueba:	1. $P \supset (P \vee P)$	P 2
	2. $(P \vee P) \supset P$	P 1
	3. $[P \supset (P \vee P)][(P \vee P) \supset P]$	DR 4
	4. $P \equiv (P \vee P)$	df.

TEOREMA 17. $\vdash_{\overline{HA}} P \equiv (PP)$

Prueba:	1. $\sim P \equiv (\sim P \vee \sim P)$	Teo. 16
	2. $\sim\sim P \equiv \sim(\sim P \vee \sim P)$	DR 8
	3. $P \equiv \sim\sim P$	Teo. 11
	4. $P \equiv \sim(\sim P \vee \sim P)$	DR 9
	5. $P \equiv (PP)$	df.

DR 10. $Q \supset R \vdash_{\overline{HA}} (P \vee Q) \supset (R \vee P)$

Prueba:	1. $Q \supset R$	premisa
	2. $(P \vee Q) \supset (P \vee R)$	DR 2
	3. $(P \vee R) \supset (R \vee P)$	P 3
	4. $(P \vee Q) \supset (R \vee P)$	DR 1

DR 11. $P \supset Q, R \supset S \vdash_{\overline{HA}} (P \vee R) \supset (Q \vee S)$

Prueba:	1. $R \supset S$	premisa
	2. $(P \vee R) \supset (S \vee P)$	DR 10
	3. $P \supset Q$	premisa
	4. $(S \vee P) \supset (Q \vee S)$	DR 10
	5. $(P \vee R) \supset (Q \vee S)$	DR 1 (2, 4)

DR 12. $P \equiv Q, R \equiv S \vdash_{\overline{HA}} (P \vee R) \equiv (Q \vee S)$

Prueba:	1. $P \equiv Q$	premisa
	2. $(P \supset Q)(Q \supset P)$	df.
	3. $P \supset Q$	DR 6
	4. $Q \supset P$	DR 7
	5. $R \equiv S$	premisa
	6. $(R \supset S)(S \supset R)$	df.
	7. $R \supset S$	DR 6
	8. $S \supset R$	DR 7

9.	$(P \vee R) \supset (Q \vee S)$	DR 11 (3, 5)
10.	$(Q \vee S) \supset (P \vee R)$	DR 11 (4, 8)
11.	$[(P \vee R) \supset (Q \vee S)][(Q \vee S) \supset (P \vee R)]$	DR 4
12.	$(P \vee R) \equiv (Q \vee S)$	df.

En esta etapa resultará útil probar la Regla de Reemplazo como el primero de nuestros metateoremas.

METATEOREMA I. (*La Regla de Reemplazo*). *Sean* $P_1, P_2, \ldots, P_n$ *cualesquier fórmulas bien formadas, y Q cualquier fórmula bien formada que no ocurre en ninguna P, y S cualquier fórmula bien formada que no contiene componentes que no sean Q y* P_i $(1 \leq i \leq n)$. *Si* S^* *es cualquier fórmula bien formada que resulta de reemplazar cualquier número de ocurrencias de Q en S, por R, entonces* $Q \equiv R \vdash_{\text{HA}} S \equiv S^*$.

Prueba: Inducción fuerte sobre el número de símbolos en S, contando cada ocurrencia de v, $\sim$, Q, o cualquiera de las P_i como un solo símbolo.

(α) $n = 1$. Aquí S es o Q sola o una sola P_i.

CASO 1. S es Q y S^* es R. Es obvio que $Q \equiv R \vdash_{\text{HA}} Q \equiv R$, que podemos escribir como $Q \equiv R \vdash_{\text{HA}} S \equiv S^*$.

CASO 2. S es Q y S^* es Q también. Aquí $\vdash_{\text{HA}} Q \equiv Q$ (Teo. 13), es decir, $\vdash_{\text{HA}} S \equiv S^*$ luego $Q \equiv R \vdash_{\text{HA}} S \equiv S^*$.

CASO 3. S es una P_i. Aquí S^* es P_i también. Aquí $\vdash_{\text{HA}} P_i \equiv P_i$ (Teo. 13) esto es, HA $S \equiv S^*$, luego $Q \equiv R \vdash_{\text{HA}} S \equiv S^*$.

(β) Aquí se supone el metateorema verdadero para cualquier S que contenga menos de n símbolos. Ahora, considerar cualquier S que exactamente contenga n (> 1) símbolos. S es o $\sim S_1$ o $S_1 \vee S_2$.

CASO 1. S es $\sim S_1$. Aquí S_1 contiene menos de n símbolos, de modo que por la hipótesis del caso β, $Q \equiv R \vdash_{\text{HA}} S_1 \equiv S_1^*$. Pero $S_1 \equiv S_1^* \vdash_{\text{HA}} \sim S_1 \equiv \sim S_1^*$ por DR 8. Es obvio que $\sim (S_1^*) = (\sim S_1)$, luego $\sim S_1^*$ es S^*, por tanto $Q \equiv R \vdash_{\text{HA}} S \equiv S^*$.

CASO 2. S es $S_1 \vee S_2$. Aquí S_1 y S_2 contiene cada una menos de n símbolos, así que por la hipótesis del caso β $Q \equiv R \vdash_{\text{HA}} S_1 \equiv S_1^*$ y $Q \equiv R \vdash_{\text{HA}} S_2 \equiv S_2^*$. Ahora por DR 12: $S_1 \equiv S_1^*, S_2 \equiv S_2^* \vdash_{\text{HA}} (S_1 \vee S_2) \equiv (S_1^* \vee S_2^*)$, de modo que $Q \equiv R \vdash_{\text{HA}} (S_1 \vee S_2) \equiv (S_1^* \vee S_2^*)$. Dado que cualquier $S_1^* \vee S_2^*$ es una S^*, tenemos $Q \equiv R \vdash_{\text{HA}} S \equiv S^*$.

Así, por inducción fuerte inferimos que independientemente del número de símbolos en S, $Q \equiv R \vdash_{HA} S \equiv S^*$.

MT I, Corolario: *Si Q, R, S y S^* son como en el* Metateorema I, *entonces* $Q \equiv R,\ S \vdash_{HA} S^*$

La prueba de este corolario es obvia.

Con unos cuantos teoremas y reglas derivadas más nos acercaremos aún más a una prueba de la completud deductiva para H.A.

Teorema 18. $\vdash_{HA} (P \vee Q) \equiv (Q \vee P)$

Prueba:	1. $(P \vee Q) \supset (Q \vee P)$	P 3
	2. $(Q \vee P) \supset (P \vee Q)$	P 3
	3. $[(P \vee Q) \supset (Q \vee P)][(Q \vee P) \supset (P \vee Q)]$	DR 4
	4. $(P \vee Q) \equiv (Q \vee P)$	df.

DR 13. $P \supset Q, P \supset R \vdash_{HA} P \supset (QR)$

Prueba:	1. $P \supset Q$	premisa
	2. $\sim Q \supset \sim P$	DR 5
	3. $P \supset R$	premisa
	4. $\sim R \supset \sim P$	DR 5
	5. $(\sim Q \vee \sim R) \supset (\sim P \vee \sim P)$	DR 11
	6. $\sim(P \vee \sim P) \supset \sim(\sim Q \vee \sim R)$	DR 5
	7. $(PP) \supset (QR)$	df.
	8. $P \supset (QR)$	MT I, Cor., Teo. 17

Teorema 19. $\vdash_{HA} [P \vee (QR)] \supset [(P \vee Q)(P \vee R)]$

Prueba:	1. $(QR) \supset Q$	Teo. 14
	2. $[P \vee (QR)] \supset (P \vee Q)$	DR 2
	3. $(QR) \supset R$	Teo. 15
	4. $[P \vee (QR)] \supset (P \vee R)$	DR 2
	5. $[P \vee (QR)] \supset [(P \vee Q)(P \vee R)]$	DR 13

DR 14. $P \supset (Q \supset R) \vdash_{HA} Q \supset (P \supset R)$

Prueba:	1. $P \supset (Q \supset R)$	premisa
	2. $\sim P \vee (\sim Q \vee R)$	df.
	3. $[\sim P \vee (\sim Q \vee R)] \supset [\sim Q \vee (\sim P \vee R)]$	Teo. 7
	4. $\sim Q \vee (\sim P \vee R)$	R′ I
	5. $Q \supset (P \supset R)$	df.

DR 15. $P \supset (Q \supset R) \vdash_{\overline{HA}} (PQ) \supset R$

Prueba:	1. $P \supset (Q \supset R)$	premisa
	2. $\sim P \vee (\sim Q \vee R)$	df.
	3. $(\sim P \vee \sim Q) \vee R$	MT I, Cor., Teo. 12
	4. $\sim\sim(\sim P \vee \sim Q) \vee R$	MT I, Cor., Teo. 11
	5. $(PQ) \supset R$	df.

TEOREMA 20. $\vdash_{\overline{HA}} [(P \vee Q)(P \vee R)] \supset [P \vee (QR)]$

Prueba:	1. $Q \supset [R \supset (QR)]$	Teo. 10
	2. $[R \vee (QR)] \supset \{(P \vee R) \supset [P \vee (QR)]\}$	P 4
	3. $Q \supset \{(P \vee R) \supset [P \vee (QR)]\}$	DR 1
	4. $(P \vee R) \supset \{Q \supset [P \vee (QR)]\}$	DR 14
	5. $\{Q \supset [P \vee (QR)]\} \supset$ $\{(P \vee Q) \supset \{P \vee [P \vee (QR)]\}\}$	P 4
	6. $(P \vee R) \supset \{(P \vee Q) \supset \{P \vee [P \vee (QR)]\}\}$	DR 1 (4, 5)
	7. $(P \vee R) \supset \{(P \vee Q) \supset [(P \vee P) \vee (QR)]\}$	MT I, Cor., Teo. 12.
	8. $(P \vee R) \supset \{(P \vee Q) \supset [P \vee (QR)]\}$	MT I, Cor., Teo. 16
	9. $(P \vee Q) \supset \{(P \vee R) \supset [P \vee (QR)]\}$	DR 14
	10. $[(P \vee Q)(P \vee R)] \supset [P \vee (QR)]$	DR 15

TEOREMA 21. $\vdash_{\overline{HA}} [P \vee (QR)] \equiv [(P \vee Q)(P \vee R)]$

Prueba: Teo. 21 se infiere del Teo. 19 y Teo. 20 por DR 4.

TEOREMA 22. $\vdash_{\overline{HA}} \sim(PQ) \equiv (\sim P \vee \sim Q)$

Prueba:	1. $\sim(PQ) \equiv \sim(PQ)$	Teo. 13
	2. $\sim(PQ) \equiv \sim\sim(\sim P \vee \sim Q)$	df.
	3. $\sim(PQ) \equiv (\sim P \vee \sim Q)$	MT I, Cor., Teo. 11

TEOREMA 23. $\vdash_{\overline{HA}} \sim(P \vee Q) \equiv (\sim P \sim Q)$

Prueba:	1. $\sim(P \vee Q) \equiv \sim(P \vee Q)$	Teo. 13
	2. $\sim(P \vee Q) \equiv \sim(\sim\sim P \vee \sim\sim Q)$	MT I, Cor., Teo. 11
	3. $\sim(P \vee Q) \equiv (\sim P \sim Q)$	df.

DR 16. $P \vdash_{\overline{HA}} P \vee Q$

Demostración:	1. $P \supset (P \vee Q)$	P 2
	2. P	premisa
	3. $P \vee Q$	R′ 1

En este punto de nuestra discusión será útil enunciar y probar el

METATEOREMA II. (*Conmutación y Asociación Generalizadas de* v). *Sean* P_1, P_2, . . . , P_n *cualesquier wff sean Q y R cualesquier wff construidas a partir de aquéllas por medio del conector* v. *Si cada*

P_i ($1 \leq i \leq n$) ocurre exactamente una vez en cada una de las wff Q y R entonces $\vdash_{\text{HA}} Q \equiv R$.

Prueba: Inducción fuerte sobre el número de disyuntos P_i en Q y en R.

(α) $n = 1$. Aquí Q y R son idénticamente la misma *wff* P_1, así que $\vdash_{\text{HA}} Q \equiv R$ por el Teo. 13.

(β) Aquí se supone verdadero el Metateorema para $k < n$ *wff* disyuntas $P_1, P_2, \ldots, P_k$. Ahora se consideran Q y R construidas cada una con exactamente $n(>1)$ disyuntos $P_1, P_2, \ldots, P_n$. Q es $S \vee T$ y R es $X \vee Y$.

Cada una de las *wff* S y T contiene al menos una de las *wff* P_i ($1 \leq i \leq n$). Podemos suponer que P_1 es un disyunto de S, porque si no lo es podemos usar el Teo. 18 y MT I, Cor. para obtener $\vdash_{\text{HA}} Q \equiv (S \vee T)$ donde S ahora contiene P_1 como disyunto.

Dado que T contiene al menos una de $P_2, P_3, \ldots, P_n$, como disyunto, S contiene menos de n de los disyuntos P_i. Así S es o P_1 y $\vdash_{\text{HA}} Q \equiv (P_1 \vee T)$, o por la hipótesis del caso β $\vdash_{\text{HA}} S \equiv (S_1 \vee S')$ donde S' es una *wff* que contiene todos los disyuntos de S, excepto P_1. En el caso último, por MT I, Cor., tenemos

$$\vdash_{\text{HA}} Q \equiv [(P_1 \vee S') \vee T]$$

y por el Teo. 12 y MT I, Cor.

$$\vdash_{\text{HA}} Q \equiv [P_1 \vee (S' \vee T)]$$

En uno y otro caso hay una *wff* que llamaremos T', tal que

$$\vdash_{\text{HA}} Q \equiv (P_1 \vee T')$$

Por el mismo razonamiento podemos mostrar que hay una *wff*, llamémosle Y', tal que

$$\vdash_{\text{HA}} R \equiv (P_1 \vee Y')$$

Cada una de las *wff* T' y Y' contiene $n - 1$ disyuntos $P_2, P_3, \ldots, P_n$, así que por el supuesto del caso β

$$\vdash_{\text{HA}} T' \equiv Y'.$$

Por el Teo. 13 tenemos $\vdash_{\text{HA}} P_1 \equiv P_1$, luego por DR 12 tenemos

$$\vdash_{\text{HA}} (P_1 \vee T') \equiv (P_1 \vee Y')$$

que por MT I, Cor., da

$$\vdash_{\mathrm{HA}} Q \equiv R.$$

El Metateorema II ahora se sigue por inducción fuerte.

Para probar la completud deductiva de H.A. usamos un método un tanto diferente al usado en el Cap. 7 para probar la completud deductiva de R.S. Aquí usamos la noción de una Forma Normal Conjuntiva, como se discute en el Apéndice A. Nuestra representación de una *wff* está en Forma Normal Conjuntiva (abreviado F.N.C.) si y sólo si: (1) contiene solamente símbolos proposicionales, paréntesis y los símbolos v, $\sim$ y $\cdot$; (2) los signos de negación sólo se aplican a los símbolos proposicionales; y (3) ningún disyunto es una conjunción, es decir, que el símbolo v no es adyacente a una conjunción en ninguna de sus ocurrencias. Simbólicamente, la *wff* S está en F.N.C. si y sólo si S es

$$S_1 \cdot S_2 \cdot \ldots \cdot S_s$$

(asociados de cualquier manera), donde cada S_i es

$$T_{i_1} \vee T_{i_2} \vee \ldots \vee T_{i_n}$$

(asociados de cualquier manera) donde cada T_i es o un símbolo proposicional o la negación de un símbolo proposicional.

A continuación se enuncia y prueba el

METATEOREMA III. *Dada cualquier representación de una wff, S, existe una fórmula en forma normal conjuntiva* S_{FNC} tal que $\vdash_{\mathrm{HA}} S \equiv S_{\mathrm{FNC}}$.

Prueba: Si S está ya en F.N.C. entonces $\vdash_{\mathrm{HA}} S \equiv S_{\mathrm{FNC}}$ por el Teo. 13. Si S no está en F.N.C. sólo puede deberse a que no satisface las condiciones 1, 2 o 3 del párrafo precedente. Si S no satisface la condición 1, contiene símbolos definidos $\equiv$ o $\supset$. Aquí reemplazamos cada parte bien formada de S de la forma $S_1 \equiv S_2$ por $(\sim S_1 \vee S_2)$ $(\sim S_2 \vee S_1)$ y cada parte bien formada de S de la forma $S_1 \supset S_2$ por $\sim S_1 \vee S_2$. El resultado de estos reemplazos es S', donde $\vdash_{\mathrm{HA}} S \equiv S'$ (por df.) y S' satisface la condición 1.

Si S (o S') no satisface la condición 2, reemplazamos cada parte bien formada de la forma $\sim(S_1 S_2)$ por $\sim S_1 \vee \sim S_2$ y toda parte bien formada de la forma $\sim(S_1 \vee S_2)$ por $\sim S_1 \sim S_2$. Después de efectuar estos reemplazos, se reemplaza cada parte bien formada de la forma $\sim\sim S_1$ por S_1. El resultado de estos reemplazos es S'' donde $\vdash_{\mathrm{HA}} S'$

$\equiv S''$ y luego $\vdash_{\text{HA}} S \equiv S''$ por el MT I y los teoremas 22, 23 y 11, y S'' satisface las condiciones 1 y 2.

Si S (o S' o S'') no satisface la condición 3, puede ser solamente porque contiene partes bien formadas de la forma $S_1 \vee (S_2S_3)$ o la forma $(S_2S_3) \vee S_1$. Ahora reemplazamos cada parte bien formada $S_1 \vee (S_2S_3)$ por $(S_1 \vee S_2)(S_1 \vee S_3)$, y cada parte bien formada $(S_2 S_3) \vee S_1$ primero por $S_1 \vee (S_2S_3)$ y entonces por $(S_1 \vee S_2)(S_1 \vee S_3)$. El resultado de estos reemplazos satisface todas las condiciones 1, 2 y 3, y es, por tanto, una S_{FNC}. Además, $\vdash_{\text{HA}} S \equiv S_{\text{FNC}}$ por el MT I y los Teoremas 18 y 19.

Luego, para toda *wff* S existe una correspondiente *wff* S_{FNC}, en Forma Normal Conjuntiva tal que $\vdash_{\text{HA}} S \equiv S_{\text{FNC}}$.

Todas las H.A. equivalencias preservan la verdad, luego si S es una tautología entonces cualquier S_{FNC} tal que $\vdash_{\text{HA}} S \equiv S_{\text{FNC}}$ es también una tautología.

Es claro que si una *wff* S es una disyunción de las *wff*, $T_1, T_2, \ldots, T_n$ donde cada T_j es o un símbolo proposicional o la negación de un símbolo proposicional, entonces si S es una tautología debe haber un símbolo proposicional P tal que P y $\sim P$ sean disyuntos en S, ambos. Pues si no es así, entonces las asignacionas adecuadas de valores de verdad (*falso* para cada T_j que sea un símbolo proposicional y *verdadero* para cada símbolo proposicional cuya negación sea una T_j) harán falso a cada disyunto de S y luego falso también S contradiciendo la hipótesis de que S es una tautología y, por tanto, es verdadera para cualquier asignación de valores de verdad a sus símbolos proposicionales componentes.

Teniendo presentes estas observaciones podemos enunciar y demostrar el

METATEOREMA I V. *Si una wff en* F.N.C., S_{FNC}, *es una tautología, entonces* $\vdash_{\text{HA}} S_{\text{FNC}}$.

Prueba: Sea S_{FNC} una *wff* en F.N.C., que es también una tautología. S_{FNC} debe ser una conjunción $S_1 S_2 \ldots S_s$ cada uno de cuyos conyuntos S_i $(1 \leq i \leq s)$ es una disyunción de fórmulas bien formadas $T_1, T_2 \ldots, T_{n_i}$ cada una de las cuales es o un símbolo proposicional o la negación de un símbolo proposicional. Dado que S_{FNC} es una tautología, cada uno de sus conjuntos S_i es tautológico, porque una conjunción debe ser verdadera si y sólo si todos sus conjuntos deben ser verdaderos. Ya hemos señalado que una disyunción S_i de símbolos proposicionales puede ser una tautología sólo si hay un símbolo proposicional P tal que P y $\sim P$ sean disyuntos de S_i. Pero $\vdash_{HA} P \vee \sim P$ por el Teorema 4, de lo que deducimos $\vdash_{HA}$ $(P \vee \sim P) \vee Q$ por la DR 16, donde en este caso Q es una disyunción de todos los disyuntos de S_i diferentes de P y $\sim P$. Pero por el MT II $\vdash_{HA} S_i \equiv [(P \vee \sim P) \vee Q]$, luego, $\vdash_{HA} S_i$ por el MT I, Cor. Así, todo conjunto S_i de S_{FNC} es un teorema, esto es, $\vdash_{HA} S_1$, $\vdash_{HA} S_2, \ldots,$ $\vdash_{HA} S_s$. Ahora, por $s - 1$ utilizaciones de DR 4 obtenemos $\vdash_{HA} S_1, S_2 \ldots S_s$ que es $\vdash_{HA} S_{FNC}$.

Con esto se completa nuestra prueba del Metateorema IV.

Ahora se sigue la completud deductiva de H.A.

METATEOREMA V. *El sistema* H.A. *es deductivamente completo.*

Prueba: Por la completud funcional de H.A. cualquier tautología se puede expresar en H.A., digamos por la *wff* S. Por el MT III, debe haber una fórmula C.N.F. en forma normal conjuntiva, S_{FNC}, tal que $\vdash_{HA} S \equiv S_{FNC}$. La *wff* S_{FNC} es también tautológica, luego por el MT IV, $\vdash_{HA} S_{FNC}$, y por el MT I, Cor, $\vdash_{HA} S$. Luego, H.A. es deductivamente completo.

EJERCICIOS

Probar que cada uno de los cálculos proposicionales descritos en los ejercicios de la Sec. 7.4 es un sistema modelo de la lógica.

8.3. El Uso de Puntos como Corchetes

Se ha señalado que el lenguaje de la lógica simbólica requiere de puntuación para eliminar las ambigüedades. Esta característica la comparte con los lenguajes naturales, así como otros lenguajes artificiales como el álgebra (ordinaria). Hemos estado usando tres clases de signos de puntuación en nuestro lenguaje lógico: los paréntesis, los corchetes y las llaves. En la discusión que sigue será conveniente usar la palabra "corchetes" refiriéndose de manera indistinta a todos ellos. Aun las fórmulas moderadamente complicadas requieren muchos pares de corchetes, lo que dificulta su lectura. La puntuación por pares de símbolos involucra redundancia. En la fórmula

$$(P \supset Q) \vee (P \supset \sim Q)$$

es necesaria *alguna* puntuación para evitar la ambigüedad. Los corchetes son esenciales, pero no los corchetes *apareados*, porque los paréntesis de afuera pueden retirarse sin incurrir en ambigüedades, dejando

$$P \supset Q) \vee (P \supset \sim Q$$

El mismo efecto de puntuación puede obtenerse reemplazando los paréntesis restantes por puntos, lo que daría

$$P \supset Q . \vee . P \supset \sim Q$$

No hay peligro de confundir el punto de puntuación con el de conjunción, pues el punto de puntuación sólo puede aparecer adyacente a un símbolo conectivo tal como "v", "⊃" o "≡" mientras que el punto de la conjunción nunca puede ocupar una posición tal.

Los puntos son de forma simétrica en contraste con la asimetría de los corchetes. Así, "(", "[", "{" son todos cóncavos a la derecha, lo que indica que operan o agrupan hacia la derecha, mientras que ")", "]", "}", son cóncavos hacia la izquierda, lo que indica que operan hacia la izquierda. La simetría de la puntuación por medio de puntos se compensa introduciendo el convenio de que los puntos de puntuación siempre operan hacia fuera del símbolo conector al que están adyacentes.

Hay analogía entre poner corchetes a las fórmulas lógicas y poner la puntuación en las oraciones de los lenguajes naturales. En éstas hay signos de puntuación de diferentes grados de fuerza, y el más fuerte "tiene precedencia sobre el más débil" o se extiende sobre el más débil. Así, por ejemplo, un punto es más fuerte que un punto y coma, y un punto y coma es más fuerte que una coma. De los tres tipos de corchetes usados en las fórmulas lógicas, nos hemos apegado al convenio de que las llaves son más fuertes que los corchetes y los corchetes más fuertes que los paréntesis. Hemos usado paréntesis para agrupar símbolos dentro de los corchetes, pero no a la inversa, y hemos usado corchetes para agrupar símbolos dentro de las llaves pero no a la inversa.

Apegándose a este convenio está pemitido quitar algunos corchetes redundantes más. Así, la fórmula

$$(P \supset Q) \supset [(R \vee P) \supset (R \vee Q)]$$

sigue estando sin ambigüedad al reescribirla como

$$P \supset Q) \supset [R \vee P) \supset (R \vee Q$$

Si usamos un punto simple en vez de un paréntesis y dos puntos en vez de un corchete, se puede reescribir dicha fórmula como

$$P \supset Q \,.\supset : R \vee P \,.\supset .\, R \vee Q$$

conviniendo en que dos puntos ligan con más fuerza que uno solo. Usando tres puntos como signo de puntuación, de mayor alcance que uno o dos puntos, la fórmula

$$[P \vee (Q \vee R)] \supset \{P \vee [Q \vee (P \vee R)]\}$$

puede reescribirse como

$$P \vee .\, Q \vee R : \supset :.\, P \vee : Q \vee .\, P \vee R$$

Al escribir algunas fórmulas nos vimos obligados a incluir un par de llaves dentro de otro porque sólo teníamos tres clases de corchetes. Ahora, el uso de los puntos agrupados permite generar todos los signos de puntuación de tantos grados de fuerza diferentes como se desee por el sencillo procedimiento de agregar puntos de uno en uno. Se convendrá en que el alcance de un grupo de n puntos se extiende por sobre el alcance de cualquier número de grupos de puntos, cada uno de los cuales tenga menos de n puntos, y que el alcance de cualquier grupo de n puntos se extiende hasta, pero no más allá; del más cercano grupo de n o más puntos. La fórmula

$$\{(Q \vee R) \supset [Q \vee (P \vee R)]\} \supset \{[P \vee (Q \vee R)] \supset \{P \vee [Q \vee (P \vee R)]\}\}$$

se puede escribir

$$Q \vee R \,.\supset : Q \vee .\, P \vee R :. \supset :: P \vee .\, Q \vee R : \supset :.\, P \vee : Q \vee .\, P \vee R$$

Por simetría, se suelen agregar puntos que no son estrictamente necesarios en prevención de ambigüedades. Así la fórmula

$$P \supset .\, Q \supset P$$

suele escribirse

$$P \,.\supset .\, Q \supset P$$

La fórmula anterior, especialmente larga, se lee con más facilidad al escribirla, de acuerdo con nuestro convenio, como

$$Q \vee R : \supset : Q \,.\vee .\, P \vee R :: \supset :: P \,.\vee .\, Q \vee R :. \supset :.\, P : \vee : Q \,.\vee .\, P \vee R$$

Ahora veamos qué es lo que debe hacerse si aparecen dos expresiones entre corchetes a los lados de un símbolo de conjunción como en la fórmula

$$(P \supset Q) \cdot (Q \supset P)$$

Aplicando la técnica recién descrita, saldríamos con la expresión poco conveniente y cómoda siguiente:

$$P \supset Q \,.\cdot.\, Q \supset P$$

Para evitarla, se acostumbra que el punto de conjunción haga de corchete, escribiendo más simplemente

$$P \supset Q.Q \supset P$$

Aquí el punto único debe pensarse que opera en ambas direcciones, derecha e izquierda. Este convenio es satisfactorio, como se ve al observar que las fórmulas diferentes

1. $P \supset [(Q.Q) \supset P]$
2. $[P \supset (Q.Q)] \supset P$
3. $[(P \supset Q).Q] \supset P$
4. $P \supset [Q.(Q \supset P)]$

pueden escribirse en forma distinta y no ambigua como

1′. $P \supset :. Q.Q : \supset P$
2′. $P \supset : Q.Q :. \supset P$
3′. $P \supset Q.Q : \supset P$
4′. $P \supset : Q.Q \supset P$

El uso de los puntos como corchetes tiene la ventaja de ser económico, además de la ventaja de proveer una infinidad de signos de puntuación diferentes de diversas fuerzas, siendo fácil determinar sus fuerzas o alcances respectivos por un simple conteo de los puntos constituyentes.[3]

8.4. Una Notación sin Paréntesis

El lógico polaco J. Lukasiewicz ha ideado una notación que se abstiene por completo del uso de los paréntesis y que ha sido ampliamente usada por los miembros de la escuela polaca. Correspondientes a los símbolos operadores más comunes

$$\sim \quad \supset \quad \cdot \quad \vee$$

se tienen los cuatro símbolos

$$N \quad C \quad K \quad A$$

En la escritura de sus fórmulas usan minúsculas "*p*", "*q*", "*r*", "*s*", . . . en vez de las mayúsculas "*P*", "*Q*", "*R*", "*S*", . . . En vez de escribir los

[3] En *Symbolic Logic*, por C. I. Lewis y H. C. Langford, Nueva York, 1932, Apéndice I, Págs. 486–489, se encuentra una discusión más detallada de este asunto. Para discusiones más técnicas el lector puede consultar "On the Use of Dots as Brackets in Logical Expressions", por H. B. Curry en *The Journal of Symbolic Logic*, Vol. 2 (1937), Págs. 26–28 y "The Use of Dots as Brackets in Church's System", por A. M. Turing, *The Journal of Symbolic Logic*, Vol. 7 (1942), Págs. 146–156.

símbolos conectores, *entre* las fórmulas conectadas, se les pone directamente a la izquierda de las dos fórmulas que se van a unir. Así

$\sim P$ se escribe Np
$P \supset Q$ se escribe Cpq
$P \cdot Q$ se escribe Kpq
$P \vee Q$ se escribe Apq

Esta notación es no ambigua como puede verse al comparar las siguientes fórmulas:

$P \supset (Q \supset R)$ se escribe $CpCqr$
$(P \supset Q) \supset R$ se escribe $CCpqr$
$P \supset (Q \cdot R)$ se escribe $CpKqr$
$(P \supset Q) \cdot R$ se escribe $KCpqr$
$(P \vee Q) \supset (R \cdot S)$ se escribe $CApqKrs$

Los axiomas de R.S. se traducen a la notación polaca como

Ax. 1. *CpKpp*
Ax. 2. *CKpqp*
Ax. 3. *CCpqCNKqrNKrp*

Y los tres postulados del mismo sistema de Lukasiewicz en su notación se escriben

P 1. *CpCqp*
P 2. *CCpCqrCCpqCpr*
P 3. *CCNqNpCpq*

La notación polaca tiene la obvia ventaja de abstenerse de todos los signos especiales de puntuación, pues el *orden* de los símbolos en una fórmula elimina toda ambigüedad en la misma.

EJERCICIOS

*1. Traducir los axiomas de H.A. a la notación polaca.
2. Traducir los axiomas de F.S. a la notación polaca.
3. Traducir los axiomas de P_N a la notación polaca.

8.5. Los Operadores Raya y Daga

Cualquiera de los siguientes pares de operadores provee una lógica funcionalmente completa: $\sim$ y $\cdot$, $\sim$ y $\vee$, $\sim$ y $\supset$, o $\supset$ y $+$. Es posible construir un sistema de lógica funcionalmente completo que contenga un solo operador y esto lo podemos hacer de cualquiera de dos maneras.

La primera es adoptando como único operador primitivo el llamado operador raya. Este símbolo operador llamado "negación alternativa", por Quine,[4] opera sobre o conecta dos fórmulas, y se escribe "P|Q". Su interpretación estándar es la de negar que ambas fórmulas P y Q sean verdaderas, que es lo mismo que afirmar que una al menos es falsa. Se define por la tabla de verdad:

P	Q	$P\|Q$
T	**T**	**F**
T	**F**	**T**
F	**T**	**T**
F	**F**	**T**

Los otros operadores, $\sim$, $\cdot$, v y $\supset$, todos pueden definirse por o en términos de la función raya. Por el método de las tablas de verdad fácilmente se verifica que las siguientes definiciones preservan las interpretaciones estándar de los símbolos que se definen:

$$\begin{aligned} \sim P &= \text{df} \quad P|P \\ P.Q &= \text{df} \quad P|Q.|.P|Q \\ P \vee Q &= \text{df} \quad P|P.|.Q|Q \\ P \supset Q &= \text{df} \quad P.|.Q|Q \end{aligned}$$

El otro operador que es suficiente para una lógica funcionalmente completa es el de la "negación conjunta" que se simboliza con una flecha apuntando hacia abajo y que llamaremos el operador daga. Se escribe "P↓Q" y su interpretación estándar es la de negar que sea verdadera cualquiera de las fórmulas P o Q, lo que equivale a afirmar que ambas son falsas. Lo define la siguiente tabla de verdad:

P	Q	$P{\downarrow}Q$
T	**T**	**F**
T	**F**	**F**
F	**T**	**F**
F	**F**	**T**

Los otros operadores pueden definirse en términos del operador daga. Con tablas de verdad fácilmente se verifica que las definiciones preservan las interpretaciones normales de los símbolos que se definen:

[4] Ver Págs. 48–49 de *Mathematical Logic*, por W. V. O. Quine, Cambridge, Massachussets, Harvard University Press, 1947. La función raya frecuentemente es llamada la "función raya de Sheffer", en honor del profesor H. M. Sheffer, aunque el primero en usarla fue C. S. Peirce.

$$\begin{aligned} \sim P &= \text{df} \quad P{\downarrow}P \\ P.Q &= \text{df} \quad P{\downarrow}P.{\downarrow}.Q{\downarrow}Q \\ P \vee Q &= \text{df} \quad P{\downarrow}Q.{\downarrow}.P{\downarrow}Q \\ P \supset Q &= \text{df} \quad P{\downarrow}P.{\downarrow}.Q{:}{\downarrow}{:}P{\downarrow}P.{\downarrow}.Q \end{aligned}$$

Así vemos que es posible construir sistemas funcionalmente completos de lógica, basados en un solo operador, que puede ser el operador raya o el operador daga. Es interesante el paralelismo que hay entre la definición de la función raya en términos de la función daga, y la de la función daga en términos de la función raya. Estas definiciones son:

$$\begin{aligned} P{\downarrow}Q &= \text{df} \quad P|P.|.Q|Q{:}|{:}P|P.|.Q|Q \\ P|Q &= \text{df} \quad P{\downarrow}P.{\downarrow}.Q{\downarrow}Q{:}{\downarrow}{:}P{\downarrow}P.{\downarrow}.Q{\downarrow}Q \end{aligned}$$

como es fácil verificar.

EJERCICIOS

1. Expresar el Axioma 1 de R.S. en términos de la función raya.
*2. Expresar el Axioma 1 de R.S. en términos de la función daga.
3. Expresar P 1 de H.A. en términos de la función daga.
4. Expresar el Axioma 3 de R.S. en términos de la función raya.
5. Expresar el Axioma 1 de L.S. en términos de la función daga.
*6. Expresar el Axioma 2 de R.S. en términos de la función raya.
7. Expresar el Axioma 5 de F.S. en términos de la función raya.
*8. Expresar el Axioma 5 de F.S. en términos de la función daga.
9. Expresar el Axioma 1 de F.S. en términos de la función raya.
10. Expresar P 2 de H.A. en términos de la función daga.

8.6. El Sistema de Nicod

Hasta aquí, en el texto y los ejercicios se han presentado varios Sistemas Modelo de Lógica alternativos. Cada uno se basa en dos símbolos operadores primitivos, y el número de sus axiomas se encuentra entre tres para R.S. y cinco para F.S. Un sistema más económico tanto en operadores primitivos como en postulados se debe a J. G. P. Nicod.[5] El sistema de Nicod se puede desarrollar como sigue.

[5] "A Reduction in the Number of the Primitive Propositions of Logic", por J. G. P. Nicod, *Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, Vol. 19 (1916), Págs. 32-40.

Véase también *A Treatise of Formal Logic*, por J. Jorgensen, London, 1931, Vol. 2, Págs. 149–172.

"A Note on Nicod's Postulate", por W. V. Quine, *Mind*, n.s. Vol. 41 (1932), Págs. 345–350.

"Remark on Nicod's Reduction of *Principia Mathematica*", por B. A. Bernstein, *The Journal of Symbolic Logic*, Vol. 2 (1937) Págs. 165–166.

"Axiomatization of Propositional Calculus with Sheffer Functors", por Thomas W. Scharle, *Notre Dame Journal of Formal Logic*, Vol. 6 (1965), Págs. 209–217.

Los símbolos primitivos son una infinidad de símbolos proposicionales P, Q, R, S, T, con y sin subíndices, paréntesis (o puntos), y el único símbolo operador "$|$". La regla recursiva para las fórmulas bien formadas en el sistema N se puede enunciar como:

1. Toda letra de N es una *wff*.
2. Si P y Q son *wff*, entonces $(P)|(Q)$ es una *wff*.

(Ninguna fórmula de N se considerará una *wff* si no lo es por la definición que antecede.)

Hay que notar que aun la regla recursiva para las fórmulas bien formadas es más simple en el sistema de Nicod, pues sólo requiere dos cláusulas y no tres. Este es el primer fruto de usar un solo operador.

El único axioma requerido (o mejor dicho, el único esquema para una infinidad de axiomas de la lógica objeto) se enuncia en nuestro metalenguaje en el que se usan puntos como corchetes, de la manera siguiente:

$$\text{Ax. } P.|.Q|R:|::T.|.T|T:.|:.S|Q:|:P|S.|.P|S$$

La única regla de inferencia necesitada se puede enunciar como

Regla. De P y $P.|.R|Q$ inferir Q.

Las definiciones de un "argumento válido en N" y de un "teorema de N", esto es, de $P_1, P_2, \ldots, P_n \vdash_{\mathrm{N}} Q$ y $\vdash_{\mathrm{N}} P$

son estrictamente análogas a las que se dieron para "$\vdash_{\mathrm{RS}}$" y "$\vdash_{\mathrm{HA}}$".

Aunque más económico en los aspectos indicados, difícilmente puede decirse que el sistema de Nicod sea *más sencillo* que los sistemas ya mencionados. Sólo hay un axioma para N, pero es más complicado que cualquier axioma o postulado de cualquier otro sistema. No sólo es más largo sino que involucra cinco símbolos proposicionales distintos, "P", "Q", "R", "S" y "T", mientras que el sistema entero de axiomas para otro cualquiera de los sistemas puede enunciarse en términos de solamente tres símbolos proposicionales distintos. Con respecto a las reglas de inferencia de los diferentes sistemas la situación es similar. La regla de Nicod no es *Modus Ponens*, sino un instrumento de deducción más poderoso. *Modus Ponens* que se puede enunciar como

$$\text{De } P \text{ y } P.\,|\,.Q|Q \text{ inferir } Q$$

es simplemente un caso especial de la Regla de Nicod, en donde R y Q idénticamente denotan la misma fórmula bien formada del lenguaje objeto. La Regla de Nicod, así como su axioma, son más complicadas que las requeridas en sistemas de lógica menos económicos.

Ya se ha indicado en la discusión de la función raya, en la Sec. 8.5, que el sistema de Nicod es funcionalmente completo. La analiticidad de N se muestra con facilidad estableciendo por tablas de verdad que el axioma es tautológico, y que la regla sólo puede conducir a tautologías partiendo de tautologías. Para concluir la prueba de que el sistema de Nicod es una Lógica Modelo, queda por probar la completud deductiva de N. Cuando se intenta hacerlo se descubre que con toda la economía de su axioma único y la fuerza mayor de su regla es, en realidad, muy difícil deducir teoremas en el Sistema de Nicod. Pero es un intento interesante desde el punto de vista de saber qué tan lejos se puede llegar en la dirección de reducir el número de postulados y tener aún un sistema de lógica deductivamente completo.

Desarrollaremos diecisiete teoremas del sistema de Nicod y una regla derivada. Los cuatro últimos serán los cuatro axiomas del sistema de Hilbert-Ackermann y la regla derivada será la regla R′ 1 del sistema de Hilbert-Ackermann. Claro está que habrá que enunciarlos en su forma no abreviada y entonces expresarlos en la notación del sistema de Nicod. Los axiomas del sistema de Hilbert-Ackermann expresados en términos de los símbolos primitivos $\sim$ y v de ese sistema son

1. $\sim(P \vee P) \vee P$
2. $\sim P \vee (P \vee Q)$
3. $\sim(P \vee Q) \vee (Q \vee P)$
4. $\sim(\sim P \vee Q) \vee [\sim(R \vee P) \vee (R \vee Q)]$

La regla de Hilbert-Ackermann, también no abreviada, es

De P y $\sim P \vee Q$ inferir Q

Todos los anteriores, expresados en la notación del sistema de Nicod en la que "$\sim P$" se escribe "$P|P$" y "$P \vee Q$" se escribe "$P|P.|.Q|Q$" son los siguientes:

1. $P|P.|.P|P:|:P|P.|.P|P:.|:.P|P.|.P|P:|:P|P.|.P|P::|::P|P.$
2. $P|P.|.P|P:.|:.P|P.|.Q|Q:|:P|P.|.Q|Q.$
3. $P|P.|.Q|Q:|:P|P.|.Q|Q:.|:.P|P.|.Q|Q:|:P|P.|.Q|Q::|::Q|Q.|.P|P:|:$ $Q|Q.|.P|P.$
4. $P|P.|.P|P:|:Q|Q:.|:.P|P.|.P|P:|:Q|Q::|::P|P.|.P|P:|:Q|Q:.|:.P|P.|.$ $P|P:|:Q|Q:::|:::R|R.|.P|P:|:R|R.|.P|P:.|:.R|R.|.P|P:|:R|R.|.P|P::|::$ $R|R.|.Q|Q:|:R|R.|.Q|Q::.|::.R|R.|.P|P:|:R|R.|.P|P:.|:.R|R.|.P|$ $P:|:R|R.|.P|P::|::R|R.|.Q|Q:|:R|R.|.Q|Q.$

R′ 1. De $P|$ y $P|P.|.P|P:|:Q|Q$ inferir Q.

Nuestro desarrollo del sistema de Nicod se hará por completo en términos de la función raya. Dado que las fórmulas de las demostraciones son de una longitud casi intolerable, vamos a describirlas más bien que escribirlas. No obstante, nuestras descripciones serán lo suficientemente completas para permitir que el lector las escriba por sí mismo.

Teorema 1. $\vdash_{\mathrm{N}} Q:.|:.T.|.T|T:|:S::.|::.S:|:T.|.T|T:.|:.Q::|::S:|:T.|.T|T:.|:.Q.$

Prueba: El renglón 1 es el Axioma de Nicod con T en vez de P, de Q y de R. El renglón 2 es el Axioma de Nicod con $T.|.T|T$ en vez de P y de Q, y con $S|T:|:T|S.|.T|S$ en vez de R. El renglón 3 es el resultado de aplicar la Regla de Nicod a los renglones 1 y 2. El renglón 4 es el Axioma de Nicod con $S:|:T.|.T|T$ en vez de P, con $T.|.T|T:|:S$ en vez de Q y de R, y con Q en vez de S. El renglón 5 es el resultado de aplicar la Regla de Nicod a los renglones 3 y 4.

Teorema 2. $\vdash_{\mathrm{N}} T.|.T|T$

Prueba: El renglón 1 es el Teorema 1 con $T.|.T|T$ en lugar de Q, y con $S|T:|:T|S.|.T|S$ en lugar de S. El renglón 2 es el Axioma de Nicod con $T.|.T|T::|::T.|.T|T:.|:.S|T:|:T|S.|.T|S$ en lugar de P, con $S|T:|:T|S.|.T|S:.|:.T.|.T|T::|::T.|.T|T$ en lugar de Q y de R, y con $S|T:::|:::S|T:|:T|S.|.T|S:.|:.T.|.T|T::|::S::.|::.S|T:|:T|S.|.T|S:.|:.T.|.T|T::|::S:::.|:::.T.|.T|T$ en lugar de S. El renglón 3 es el resultado de aplicar la Regla de Nicod a los renglones 1 y 2. El renglón 4 es el Axioma de Nicod con $S|T:|:T|S.|.T|S:.|:.T.|.T|T$ en lugar de P, con T en lugar de Q, y con $T|T$ en lugar de R. El renglón 5 es el Teorema 1 con $S|T:|:T|S.|.T|S:.|:.T.|.T|T::|::T.|.T|T$ en lugar de Q y con $S|T:::|:::S|T:|:T|S.|.T|S:.|:.T.|.T|T::|::S::.|::.S|T:|:T|S.|.T|S:.|:.T.|.T|T::|::S$ en lugar de S. El renglón 6 es el resultado de aplicar la Regla de Nicod a los renglones 4 y 5. El renglón 7 es el resultado de aplicar la Regla de Nicod a los renglones 3 y 6. El renglón 8 es el Axioma de Nicod con T en lugar de P, de Q y de R. El renglón 9 es el resultado de aplicar la Regla de Nicod a los renglones 7 y 8.

Teorema 3. $\vdash_{\mathrm{N}} S|P:|:P|S.|.P|S$

Prueba: El renglón 1 es el Axioma de Nicod con P en lugar de Q y de R. El renglón 2 es el Teo. 2 con P en lugar de T. El renglón 3 es el resultado de aplicar la Regla de Nicod a los renglones 1 y 2.

Teorema 4. $\vdash_{\mathrm{N}} P|P.|.P$

Prueba: El renglón 1 es el Teo. 3 con $P|P$ en lugar de P y con P en lugar de S. El renglón 2 es el Teo. 2 con P en lugar de T. El renglón 3 es el resultado de aplicar la Regla de Nicod a los renglones 1 y 2.

TEOREMA 5. $\vdash_{\mathrm{N}} P|P:|:S|P.|.S|P$

Prueba: El renglón 1 es el Teo. 3 con $P|S$ en lugar de S y con $S|P.|.S|P$ en lugar de P. El renglón 2 es el Teo. 3 con P en lugar de S y S en lugar de P. El renglón 3 es el resultado de aplicar la Regla de Nicod a los renglones 1 y 2; el renglón 4 es el Axioma de Nicod con $S|P.|.S|P$ en lugar de P, con P en lugar de Q, con S en lugar de R, y con $P|P$ en lugar de S. El renglón 5 es el resultado de aplicar la Regla de Nicod a los renglones 3 y 4. El renglón 6 es el Teo. 4. El renglón 7 es el resultado de aplicar la Regla de Nicod a los renglones 5 y 6. El renglón 8 es el Teo. 3 con $S|P.|.S|P$ en lugar de S, y con $P|P$ en lugar de P. El renglón 9 es el resultado de aplicar la Regla de Nicod a los renglones 7 y 8.

TEOREMA 6. $\vdash_{\mathrm{N}} P.|.Q|R::|::S|Q:|:P|S.|.P|S:.|:.S|Q:|:P|S.|.P|S$

Prueba: El renglón 1 es el Axioma de Nicod con $S|Q:|:P|S.|.P|S:.|:.S|Q:|:P|S.|:P|S$ en lugar de P, con $T.|.T|T:.|:.S|Q:|:P|S.|.P|S$ en lugar de Q y de R, y con $P.|.Q|R$ en lugar de S. El renglón 2 es el Teo. 5 con $S|Q:|:P|S.|.P|S$ en lugar de P, y con $T.|.T|T$ en lugar de S. El renglón 3 es el resultado de aplicar la Regla de Nicod a los renglones 1 y 2. El renglón 4 es el Axioma de Nicod. El renglón 5 es el resultado de aplicar la Regla de Nicod a los renglones 3 y 4. El renglón 6 es el Teo. 3 con $S|Q:|:P|S.|.P|S:.|:.S|Q:|:P|S.|.P|S$ en lugar de S, y con $P.|.Q|R$ en lugar de P. El renglón 7 es el resultado de aplicar la Regla de Nicod a los renglones 5 y 6.

TEOREMA 7. $\vdash_{\mathrm{N}} Q|S.|.U:|:Q|S.|.U:.|:.S|Q.|.U$

Prueba: El renglón 1 es el Teo. 6 con $Q|S$ en lugar de P, con $S|Q$ en lugar de Q y de R, y con U en lugar de S. El renglón 2 es el Teo. 3 con Q en lugar de S y con S en lugar de P. El renglón 3 es el resultado de aplicar la Regla de Nicod a los renglones 1 y 2. El renglón 4 es el Teo. 3 con $U.|.S|Q$ en lugar de S y con $Q|S.|.U:|:Q|S.|.U$ en lugar de P. El renglón 5 es el resultado de aplicar la Regla de Nicod a los renglones 3 y 4. El renglón 6 es el Teo. 6 con $S|Q.|.U$ en lugar de P, con $U.|.S|Q$ en lugar de Q y de R, y con $Q|S.|.U:|:Q|S.|.U$ en lugar de S. El renglón 7 es el Teo. 3 con $S|Q$ en lugar de S y con U en lugar de P. El renglón 8 es el resultado de aplicar la Regla de Nicod a los renglones 6 y 7. El renglón 9 es el resultado de aplicar la Regla de Nicod a los renglones 5 y 8. El renglón 10 es el Teo. 3 con $S|Q.|.U$ en lugar de S, y con $Q|S.|.U:|:Q|S.|.U$ en lugar de P. El renglón 11 es el resultado de aplicar la Regla de Nicod a los renglones 9 y 10.

TEOREMA 8. $\vdash_N P.|.Q|R::|::Q|S:|:P|S.|.P|S:.|:.Q|S:|:P|S.|.P|S$

Prueba: El renglón 1 es el Teo. 6 con $P.|.Q|R$ en lugar de P, con $S|Q:|:P|S.|.P|S$ en lugar de Q y de R, y con $Q|S:|:P|S.|.P|S:.|:.Q|S:|:P|S.|.P|S$ en lugar de S. El renglón 2 es el Teo. 6. El renglón 3 es el resultado de aplicar la Regla de Nicod a los renglones 1 y 2. El renglón 4 es el Teo. 7 con $P|S.|.P|S$ en lugar de U. El renglón 5 es el resultado de aplicar la Regla de Nicod a los renglones 3 y 4.

TEOREMA 9. $\vdash_N S:.|:.P.|.S|S:|:P.|.S|S$

Prueba: El renglón 1 es el Teo. 3 con $S|S.|.P$ en lugar de S, y con $P.|.S|S:|:P.|.S|S$ en lugar de P. El renglón 2 es el Teo. 1 con $S|S$ en lugar de S. El renglón 3 es el resultado de aplicar la Regla de Nicod a los renglones 1 y 2. El renglón 4 es el axioma de Nicod con $P.|.S|S:|:P.|.S|S$ en lugar de P, con $S|S$ en lugar de Q, y con P en lugar de R. El renglón 5 es el resultado de aplicar la Regla de Nicod a los renglones 3 y 4. El renglón 6 es el Teo. 2 con S en lugar de T. El renglón 7 es el resultado de aplicar la Regla de Nicod a los renglones 5 y 6. El renglón 8 es el Teo. 3 con $P.|.S|S:|:P.|.S|S$ en lugar de S, y con S en lugar de P. El renglón 9 es el resultado de aplicar la Regla de Nicod a los renglones 7 y 8.

TEOREMA 10. $\vdash_N Q|Q:|:Q|S.|.Q|S$

Prueba: El renglón 1 es el Teo. 8 con $Q|Q$ en lugar de P, con $S|Q$ en lugar de Q y de R, y con $Q|S.|.Q|S$ en lugar de S. El renglón 2 es el Teo. 5 con Q en lugar de P. El renglón 3 es el resultado de aplicar la Regla de Nicod a los renglones 1 y 2. El renglón 4 es el Teo. 3 con Q en lugar de P. El renglón 5 es el resultado de aplicar la Regla de Nicod a los renglones 3 y 4.

TEOREMA 11. $\vdash_N Q:.|:.Q|P.|.P:|:Q|P.|.P$

Prueba: El renglón 1 es el Teo. 8 con Q en lugar de R y con P en lugar de S. El renglón 2 es el Teo. 9 con Q en lugar de S. El renglón 3 es el Teo. 8 con Q en lugar de P, con $P.|.Q|Q$ en lugar de Q y de R, y con $Q|P:|:P|P.|.P|P:.|:.Q|P:|:P.|.P|P$ en lugar de S. El renglón 4 es el resultado de aplicar la Regla de Nicod a los renglones 2 y 3. El renglón 5 es el resultado de aplicar la Regla de Nicod a los renglones 1 y 4. El renglón 6 es el Teo. 9 con $P|P.|.P$ en lugar de S y con Q en lugar de P. El renglón 7 es el Teo. 4. El renglón 8 es el resultado de aplicar la Regla de Nicod a los renglones 6 y 7. El renglón 9 es el Teo. 8 con $Q|P$ en lugar de P, con $P|P$ en lugar de Q y de R, y con P en lugar de S. El renglón 10 es el Teo. 8 con Q en lugar de P, con $Q|P:|:P|P.|.P|P$ en lugar de Q y de R, y con $P|P.|.P:.|:.Q|P.|.P:|:Q|P.|.P::|::P|P.|.P:.|:.Q|P.|.P:|:Q|P.|.P$ en lugar de S. El renglón 11 es el resultado de aplicar la Regla de Nicod a los renglones 5 y 10. El renglón 12 es el resultado de aplicar la Regla de Nicod a los renglones 9 y 11. El renglón 13 es el Teo. 8 con Q en lugar de P con $P|P.|.P$ en lugar de Q y de R, y con $Q|P.|.P:|:Q|P.|.P$ en lugar de S. El renglón 14 es el resultado de aplicar la Regla de Nicod a los renglones 8 y 13. El renglón 15 es el Teo. 8 con Q en lugar de P, con $P|P.|.P:.|:.Q|P.|.P:|:Q|P.|.P$ en lugar de Q y de R y con $Q:.|:.Q|P.|.P:|:Q|P.|.P::|::Q:.|:.Q|P.|.P:|:Q|P.|.P$ en lugar de S. El renglón 16 es el resultado de aplicar la Regla de Nicod a los renglones 12 y 15. El renglón 17 es el resultado de aplicar la Regla de Nicod a los renglones 14 y 16. El renglón 18 es el Teo. 10 con $Q|P.|.P:|:Q|P.|.P$ en lugar de S. El renglón 19 es el Teo. 3 con $Q|Q$ en lugar de S y con $Q:.|:.Q|P.|.P:|:Q|P.|.P::|::Q:.|:.Q|P.|.P:|:Q|P.|.P$ en lugar de P. El renglón 20 es el resultado de aplicar la Regla de Nicod a los renglones 18 y 19. El renglón 21 es el Teo. 8 con $Q:.|:.Q|P.|.P:|:Q|P.|.P::|::Q:.|:.Q|P.|.P:|:Q|P.|.P$ en lugar de P y de S, y con Q en lugar de R. El renglón 22 es el resultado de aplicar la Regla de Nicod a los renglones 20 y 21. El renglón 23 es el resultado de aplicar la Regla de Nicod a los renglones 17 y 22. El renglón 24 es el Teo. 4 con $Q:.|:.Q|P.|.P:|:Q|P.|.P::|::Q:.|:.Q|P.|.P:|:Q|P.|.P$ en lugar de P. El renglón 25 es el resultado de aplicar la Regla de Nicod a los renglones 23 y 24.

TEOREMA 12. $\vdash_{N} P:|:Q|R.|.Q|R::|::Q:|:P|R.|.P|R:.|:.Q:|:P|R.|.P|R$

Prueba: El renglón 1 es el Teo. 8 con Q en lugar de P, con $Q|R.|.R$ en lugar de Q y de R, y con $P|R.|.P|R$ en lugar de S. El renglón 2 es el Teo. 11 con R en lugar de P. El renglón 3 es el resultado de aplicar la Regla de Nicod a los renglones 1 y 2. El renglón 4 es el Teo. 8 con $P:|:Q|R.|.Q|R$ en lugar de P, con $Q|R.|.R:|:P|R.|.P|R$ en lugar de Q y de R, y con $Q:|:P|R.|.P|R:.|:.Q:|:P|R.|.P|R$ en lugar de S. El renglón 5 es el Teo. 8 con $Q|R$ en lugar de Q y de R, y con R en lugar de S. El renglón 6 es el resultado de aplicar la Regla de Nicod a los renglones 4 y 5. El renglón 7 es el resultado de aplicar la Regla de Nicod a los renglones 3 y 6.

TEOREMA 13. $\vdash_{N}$ P.|.Q|Q::.|::.R|R.|.P|P:.|:.R|R.|.Q|Q:|:R|R.|.Q|Q::|::R|R.|.P|P:.|:.R|R.|.Q|Q:|:R|R.|.Q|Q

Prueba: El renglón 1 es el Teo. 12 con R|R.|.P|P en lugar de P, con P.|.Q|Q en lugar de Q, y con R|R.|.Q|Q:|:R|R.|.Q|Q en lugar de R. El renglón 2 es el Teo. 8 con R|R en lugar de P, con P en lugar de Q y de R, y con Q|Q en lugar de S. El renglón 3 es el resultado de aplicar la Regla de Nicod a los renglones 1 y 2.

TEOREMA 14. $\vdash_{N}$ P|P.|.P|P:|:P|P.|.P|P:.|:.P|P.|.P|P:|:P|P.|.P|P::|::P|P (Ax. 1 de H.A.)

Prueba: El renglón 1 es el Teo. 4 con P|P.|.P|P:|:P|P.|.P|P en lugar de P. El renglón 2 es el Teo. 4 con P|P en lugar de P. El renglón 3 es el Teo. 8 con P|P.|.P|P:|:P|P.|.P|P:.|:.P|P.|.P|.P:|:P|P.|.P|P en lugar de P, con P|P.|.P|P en lugar de Q y de R, y con P|P en lugar de S. El renglón 4 es el resultado de aplicar la Regla de Nicod a los renglones 1 y 3. El renglón 5 es el resultado de aplicar la Regla de Nicod a los renglones 2 y 4.

TEOREMA 15. $\vdash_{N}$ P|P.|.P|P:.|:.P|P.|.Q|Q:|:P|P.|.Q|Q (Ax. 2 de H.A.)

Prueba: El renglón 1 es el Teo. 10 con P|P en lugar de Q, y con Q|Q en lugar de S.

TEOREMA 16. $\vdash_{N}$ P|P.|.Q|Q:|:P|P.|.Q|Q:.|:.P|P.|.Q|Q:|:P|P.|.Q|Q::|::Q|Q.|.P|P:|:Q|Q.|.P|P (Ax. 3 de H.A.)

Prueba: El renglón 1 es el Teo. 3 con P|P en lugar de S, y con Q|Q en lugar de P. El renglón 2 es el Teo. 4 con P|P.|.Q|Q:|:P|P.|.Q|Q en lugar de P. El renglón 3 es el Teo. 8 con P|P.|.Q|Q:|:P|P.|.Q|Q:.|:.P|P.|.Q|Q:|:P|P.|.Q|Q en lugar de P, con P|P.|.Q|Q en lugar de Q y de R y con Q|Q.|.P|P:|:Q|Q.|.P|P en lugar de S. El renglón 4 es el resultado de aplicar la Regla de Nicod a los renglones 2 y 3. El renglón 5 es el resultado de aplicar la Regla de Nicod a los renglones 1 y 4.

TEOREMA 17. $\vdash_{N}$ P|P.|.P|P:|:Q|Q:.|:.P|P.|.P|P:|:Q|Q::|::P|P.|.P|P:|:Q|Q:.|:.P|P.|.P|P:|:Q|Q:::|:::R|R.|.P|P:|:R|R.|.P|P:.|:.R|R.|.P|P:|:R|R.|.P|P::|::R|R.|.Q|Q:|:R|R.|.Q|Q::.|::.R|R.|.P|P:|:R|R.|.P|P:.|:.R|R.|.P|P:|:R|R.|.P|P::|::R|R.|.Q|Q:|:R|R.|.Q|Q (Ax. 4 de H.A.)

Prueba: El renglón 1 es el Teo. 4 con *P|P.|.P|P:|:Q|Q:.|:.P|P.|.P|P:|:Q|Q* en lugar de *P*. El renglón 2 es el Teo. 9 con *P* por *S* y *P|P* por *P*. El renglón 3 es el Teo. 8 con *P|P.|.P|P* en lugar de Q y de *R*, y con *Q|Q* en lugar de *S*. El renglón 4 es el resultado de aplicar la Regla de Nicod a los renglones 2 y 3. El renglón 5 es el Teo. 8 con *P|P.|.P|P:|:Q|Q:.|:.P|P.|.P|P:|:Q|Q::|::P|P.|.P|P:|:Q|Q:.|:.P|P.|.P|P:|:Q|Q* en lugar de *P*, con *P|P.|.P|P:|:Q|Q* en lugar de Q y de *R*, y con P.|.Q|Q:|:P.|.Q|Q en lugar de *S*. El renglón 6 es el resultado de aplicar la Regla de Nicod a los renglones 1 y 5. El renglón 7 es el resultado de aplicar la Regla de Nicod a los renglones 4 y 6. El renglón 8 es el Teo. 13. El renglón 9 es el Teo. 4 con *R|R.|.P|P:|:R|R.|.P|P* en lugar de *P*. El renglón 10 es el Teo. 8 con *R|R.|.P|P:|:R|R.|.P|P:.|:.R|R.|.P|P:|:R|R.|.P|P* en lugar de *P*, con *R|R.|.P|P* en lugar de Q y de *R*, y con *R|R.|.Q|Q:|:R|R.|.Q|Q* en lugar de *S*. El renglón 11 es el resultado de aplicar la Regla de Nicod a los renglones 9 y 10. El renglón 12 es el Teo. 8 con *P.|.Q|Q* en lugar de *P*, con *R|R.|.P|P:.|:.R|R.|.Q|Q:|:R|R.|.Q|Q* en lugar de Q y de *R*, y con *R|R.|.P|P:|:R|R.|.P|P:.|:.R|R.|.P|P:|:R|R.|.P|P::|::R|R.|.Q|Q:|:R|R.|.Q|Q::.|::.R|R.|.P|P:|:R|R.|.P|P:.|:.R|R.|.P|P:|:R|R.|.P|P::|::R|R.|.Q|Q:|:R|R.|.Q|Q* en lugar de *S*. El renglón 13 es el resultado de aplicar la Regla de Nicod a los renglones 8 y 12. El renglón 14 es el resultado de aplicar la Regla de Nicod a los renglones 11 y 13. El renglón 15 es el Teo. 8 con *P|P.|.P|P:|:Q|Q:.|:.P|P.|.P|P:|:Q|Q::|::P|P.|.P|P:|:Q|Q:.|:.P|P.|.P|P:|:Q|Q* en lugar de *P*, con *P.|.Q|Q* en lugar de Q y de *R*, y con *R|R.|.P|P:|:R|R.|.P|P:.|:.R|R.|.P|P:|:R|R.|.P|P::|::R|R.|.Q|Q:|:R|R.|.Q|Q::.|::.R|R.|.P|P:|:R|R.|.P|P:.|:.R|R.|.P|P:|:R|R.|.P|P::|::R|R.|.Q|Q:|:R|R.|.Q|Q* en lugar de *S*. El renglón 16 es el resultado de aplicar la Regla de Nicod a los renglones 7 y 15. El renglón 17 es el resultado de aplicar la Regla de Nicod a los renglones 14 y 16.

DR 1. *P, P|P.|.P|P:|:Q|Q* $\vdash_N$ *Q* (R′ 1 de H.A.)

Prueba: El renglón 1 es el Teo. 9 con *P* en lugar de *S*, y con *P|P* en lugar de *P*. El renglón 2 es la premisa *P*. El renglón 3 es el resultado de aplicar la Regla de Nicod a los renglones 1 y 2. El renglón 4 es la premisa *P|P.|.P|P:|:Q|Q*. El renglón 5 es el resultado de aplicar la Regla de Nicod a los renglones 3 y 4.

Deducir todas las tautologías de un solo axioma (forma de axioma) por una sola regla en términos de un solo operador, vemos así que es posible. Pero es una tarea muy tediosa.

9

Un Cálculo Funcional de Primer Orden

9.1. El Nuevo Sistema Logístico RS_1

En el Cap. 4 y las cuatro primeras secciones del Cap. 5 *usamos* principios lógicos que rigen la cuantificación de las variables individuales para probar la validez de los argumentos y demostrar verdades lógicas. Un desarrollo axiomático de esos principios es llamado un "cálculo funcional de primer orden", o también un "cálculo funcional restringido".[1] En este capítulo construiremos un sistema logístico semejante, desarrollaremos algunos de sus teoremas y probaremos que tiene las propiedales deseables como son la consistencia y la completud, de cierto tipo. De nuevo, nuestro metalenguaje será el español ordinario, además de una parte de la aritmética elemental, y algunos símbolos especiales que serán introducidos y definidos cuando sea necesario. Nuestro lenguaje objeto o lógica objeto es el nuevo sistema RS_1, que ahora describiremos.

El sistema logístico RS_1 contiene una infinidad de símbolos primitivos, de las siguientes categorías.

1. Una infinidad de letras mayúsculas de la primera parte del alfabeto con y sin subíndices:

$$A, B, C, A_1, B_1, C_1, A_2, B_2, C_2, \ldots$$

Estas son *constantes proposicionales* y en la interpretación a la que el sistema se destina expresarán proposiciones no compuestas.

2. Una infinidad de letras mayúsculas de la parte media del alfabeto con y sin subíndices:

$$P, Q, R, P_1, Q_1, R_1, P_2, Q_2, R_2, \ldots$$

[1] También llamado un cálculo de *predicados*, "restringido" o de "primer orden".

Estas son las *variables proposicionales* y en la interpretación a que el sistema se destina serán variables sentenciales de la clase discutida en la Sec. 2.3 del Cap. 2. Los símbolos de las dos primeras categorías son los *símbolos proposicionales.*

3. Una infinidad de letras mayúsculas de la parte inicial del alfabeto con y sin subíndices, con supraíndices derechos "1", "2", "3", . . .

$$\begin{array}{l} A^1, B^1, C^1, A_1^1, B_1^1, C_1^1, A_2^1, B_2^1, C_2^1, \ldots \\ A^2, B^2, C^2, A_1^2, B_1^2, C_1^2, A_2^2, B_2^2, C_2^2, \ldots \\ A^3, B^3, C^3, A_1^3, B_1^3, C_1^3, A_2^3, B_2^3, C_2^3, \ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}$$

Estas son *constantes predicadas,* y en la interpretación a que el sistema se destina cada una designará un atributo particular o relación diádica o relación triádica . . . o relación n-ádica según que el supraíndice sea "1" o "2", o "3" o "n".

4. Una infinidad de letras mayúsculas de la parte media del alfabeto con y sin subíndices, con supraíndices "1", "2", "3",. . .

$$\begin{array}{l} P^1, Q^1, R^1, P_1^1, Q_1^1, R_1^1, P_2^1, Q_2^1, R_2^1, \ldots \\ P^2, Q^2, R^2, P_1^2, Q_1^2, R_1^2, P_2^2, Q_2^2, R_2^2, \ldots \\ P^3, Q^2, R^3, P_1^3, Q_1^3, R_1^3, P_2^3, Q_2^3, R_2^3, \ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}$$

Estas son las *variables predicadas* y en la interpretación a que se destina el sistema serán símbolos por los que se podrán sustituir nombres de atributos particulares, relaciones diádicas particulares, etc. Los símbolos de las categorías tercera y cuarta son *símbolos predicados.*

5. Una infinidad de letras minúsculas de la parte inicial del alfabeto con y sin subíndices:

$$a, b, c, a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2, \ldots$$

Estas son *constantes individuales,* y en la interpretación a que el sistema se destina serán nombres propios de individuos.

6. Una infinidad de letras minúsculas de la parte final del alfabeto, con y sin subíndices:

$$x, y, z, x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, \ldots$$

Estas son *variables individuales* y en la interpretación a que se destina el sistema serán variables individuales del tipo discutido en el Cap. 4. Los símbolos de las categorías quinta y sexta son *símbolos individuales.*

7. Cuatro símbolos adicionales, solamente, completan la lista de símbolos primitivos de RS_1; estos son la tilde, el punto y los paréntesis derecho e izquierdo:

$$\sim, \cdot, (,)$$

Además de los símbolos primitivos introducimos algunos símbolos definidos en nuestro lenguaje objeto RS_1. Antes de hacerlo, sin embargo, debemos indicar el uso de algunos símbolos especiales de nuestro metalenguaje. Como en el Cap. 7, introducimos los símbolos especiales "$\sim$", "$\cdot$", "(" y ")", para denotar los símbolos especiales "$\sim$", "$\cdot$" "(", y ")" del lenguaje objeto y también usaremos corchetes y llaves para denotar paréntesis del lenguaje objeto, cuando esto facilite la lectura. En el metalenguaje usaremos letras mayúsculas con y sin subíndices como variables sintácticas, es decir, como símbolos por los que se pueden sustituir designaciones de cualesquier símbolos o sucesiones de símbolos del lenguaje objeto. Y se usarán letras minúsculas con y sin subíndices como variables individuales sintácticas, esto es, símbolos por los que se pueden sustituir designaciones de símbolos individuales del lenguaje objeto. Finalmente, convendremos en que la yuxtaposición de dos símbolos del lenguaje objeto se denotará en el metalenguaje por la yuxtaposición de sus nombres. Así, en cualquier contexto en el que "F" denote "A^1" y "x" denote "$\boldsymbol{x}$", "$F(x)$" denotará "$A^1(\boldsymbol{x})$". También será conveniente insertar comas en cualquier sucesión de símbolos del metalenguaje que designen símbolos del lenguaje objeto. Así, cuando "F" denote "$\boldsymbol{B}^3$" y "x_1", "x_2" y "x_3", denoten "$\boldsymbol{a}_1$", "$\boldsymbol{a}_2$" y "$\boldsymbol{a}_3$", respectivamente, usaremos "$F(x_1, x_2, x_3)$" para denotar "$\boldsymbol{B}^3(\boldsymbol{a}_1\boldsymbol{a}_2\boldsymbol{a}_3)$".

Introducimos los símbolos "$\mathbf{v}$", "$\supset$", "$\equiv$" y "$\exists$" en el lenguaje objeto *por definición*, y los denotamos en el metalenguaje por los símbolos "v", "$\supset$", "$\equiv$" y "$\exists$". Los nuevos símbolos del lenguaje objeto se introducen como abreviaciones por definición:

Df. $P \vee Q$ se define como abreviación de $\sim(\sim P\cdot\sim Q)$.
Df. $P \supset Q$ se define como abreviación de $\sim(P\cdot\sim Q)$.
Df. $P \equiv Q$ se define como abreviación de $(P \supset Q)\cdot(Q \supset P)$.
Df. $(\exists x)P$ se define como abreviación de $\sim(x)\sim P$.

Habrá libertad de suprimir paréntesis (en el metalenguaje) reteniendo sólo los necesarios para evitar las ambigüedades, o aquellos que agiliten la interpretación. También, en ocasiones, escribiremos "$P{\cdot}Q$" como "PQ". Aunque no siempre aprovecharemos la convención siguiente eliminando los paréntesis innecesarios, establecemos el siguiente *orden de precedencia* entre los símbolos (de nuestro metalenguaje) donde cada símbolo tiene precedencia sobre cualquiera que esté situado en una de las columnas a su derecha:

$\equiv \supset \mathrm{v} \cdot \sim$

(x) si no le precede inmediatamente un símbolo predicado
$(\exists x)$

Este convenio hace que una expresión como

$$P \equiv (x)Q \vee \sim RS \supset (\exists x)T \cdot U$$

denote las mismas fórmulas del lenguaje objeto que las denotadas por

$$\{P\} \equiv \{\{[(x)Q] \vee [(\sim R)\cdot(S)]\} \supset \{[(\exists x)T]\cdot[U]\}\}$$

Nuestro último convenio es el de la *asociación a la izquierda* que significa que cuando el convenio sobre orden de precedencia no sea suficiente para eliminar ambigüedades de una expresión, sus partes se deberán agrupar por paréntesis *a la izquierda*. Esto es, cuando una expresión contenga dos o más ocurrencias de un mismo conector y sus alcances relativos dentro de la expresión no se vean expresados de otra manera, entonces la ocurrencia más a la derecha se entenderá que tiene mayor (o el mayor) alcance.

Definimos como *fórmula de* RS_1 cualquier sucesión finita de símbolos de RS_1. Entre ellas se incluyen sucesiones como

$$)\sim)($$
$$(x)(A^1(x))$$
$$((\exists y)(B^2(xy))) \supset (C^1(a))$$
$$(\exists \vee \sim \equiv$$
$$Q^3(ab)$$

de las cuales vamos a querer incluir la segunda y la tercera entre las *bien formadas*, esto es, considerarlas con significación en la interpretación normal o pensada para el sistema.

Ahora definimos una *fórmula bien formada* de RS_1 por las siguientes reglas recursivas:

α) 1. Si F es un símbolo proposicional, entonces F es una *wff*.
2. Si F es un símbolo predicado n-ádico y $x_1, x_2, \ldots, x_n$ son n (no necesariamente distintos) símbolos individuales (donde $n = 1, 2, 3, \ldots$), entonces $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ es una *wff*.

β) 1. Si F es una *wff*, entonces $\sim(F)$ es una *wff*.
2. Si F es una *wff* y G es una *wff*, entonces $(F)\cdot(G)$ es una *wff*.
3. Si F es una *wff* y x es una variable individual, entonces (x) (F) es una *wff*.

Ninguna fórmula de RS_1 es una *wff* si no lo es por las reglas precedentes, o por estas leyes junto con las definiciones de los símbolos definidos que se han dado.

Ahora que contamos con un criterio efectivo para las *wff*, limitaremos nuestra discusión en lo que resta del capítulo a las *wff*, que son las únicas fórmulas que nos interesan.

En este punto resulta conveniente introducir algunos términos especiales más. (No se pierde generalidad al frasear las definiciones en términos de los símbolos indefinidos solamente porque los términos definidos son siempre eliminables.)

Df. Si x es una variable individual, entonces (x) si no viene inmediatamente precedido por un símbolo predicado, es el *cuantificador universal* de x (o sobre x).

Df. Si Q es una *wff* que es un componente de una *wff* P, entonces Q es una *parte bien formada* de P.

Df. Una ocurrencia de una variable x es una *wff* P se dirá que es una ocurrencia *ligada* de x en P si está en una parte bien formada de P de la forma $(x)Q$.

Df. Una ocurrencia de una variable x en una *wff* P se dirá que es *libre ocurrencia* si no está ligada.

Suponemos una infinidad de postulados para nuestra lógica objeto. Toda *wff* de cualquiera de los esquemas (patrones) siguientes, es un postulado:

P 1. $P \supset (P \cdot P)$
P 2. $(P \cdot Q) \supset P$
P 3. $(P \supset Q) \supset [\sim(Q \cdot R) \supset \sim(R \cdot P)]$
P 4. $(x)(P \supset Q) \supset [P \supset (x)Q]$, donde x es una variable individual cualquiera, P es una *wff* cualquiera que no contiene ocurrencias libres de x, y Q es cualquier *wff*.

P 5. $(x)P \supset Q$ donde x es cualquier variable individual, y es cualquier variable o constante individual, P es cualquier *wff*, Q es el resultado de reemplazar cada ocurrencia libre de x en P por y, y si y es una variable, entonces debe ocurrir libre en Q en todas las posiciones en que x ocurre libre en P (o sea, que ninguna ocurrencia ligada de y en Q es el resultado de reemplazar una ocurrencia libre de x en P por y).

Las restricciones que se formulan en P 4 y P 5 son para evitar que se incluyan ciertas falsedades manifiestas (en la interpretación a que se destina el sistema) tales como

$$(x)[(x = 1) \supset (x + x = 2)] \supset [(x = 1) \supset (x)(x + x = 2)]$$

que tiene antecedente verdadero y consecuente falso, pero que *no* es una instancia de **P** 4, pues x ocurre libre en $(x = 1)$. También se evita una falsedad como

$$(x)[(\exists y)(y \neq x)] \supset [(\exists y)(y \neq y)]$$

que no es una instancia de **P** 5, pues hay una ocurrencia ligada de la variable y en $(\exists y)(y \neq y)$ que resulta de reemplazar una ocurrencia libre de la variable x en $(\exists y)(y \neq x)$ por y.

Suponemos *dos* reglas de inferencia para RS_1:

R 1. De P y $P > Q$ inferir Q.

R 2. De P inferir $(x)P$.

A continuación definimos "demostración" para RS_1. Formalmente,

$$P_1, P_2, \ldots, P_n \vdash Q$$

asegura que hay una sucesión finita de las *wff* $S_1, S_2, \ldots S_t$ tal que para toda $S_j (1 \leq j \leq t)$ se tiene alguna de las situaciones:

a) S_j es uno de los postulados **P** 1–**P** 5, o

b) S_j es una de las premisas $P_i (1 \leq i \leq n)$, o

c) S_j es resultado de aplicar R 1 a dos S precedentes de la sucesión, digamos S_i y S_k donde $i < j$ y $k < j$, o

d) S_j resulta de aplicar R 2 a una S_i anterior de la sucesión, de modo que S_j es $(x)S_i$ donde $i < j$;

y S_t es Q.

Informalmente consideramos que $P_1, P_2, \ldots, P_n \vdash Q$ afirma que Q válidamente se infiere de $P_1, P_2, \ldots, P_n$ en RS_1.

A continuación definimos "teorema de RS_1" como una fórmula bien formada Q tal que $\vdash Q$. Debe observarse que "$\vdash$" es un símbolo especial de nuestro metalenguaje y no ocurre en RS_1 mismo.

Ahora podemos establecer la *consistencia* de RS_1. Empezamos haciendo la siguiente definición:

Df. Si f es una fórmula bien formada de RS_1 su *fórmula proposicional asociada* (que abreviamos f.p.a. y simbolizamos con F°) es la fórmula que resulta de F quitando primero todas las ocurrencias de cuantificadores en F, junto con todos los paréntesis requeridos por dichos cuantificadores, y después reemplazando toda parte bien formada de F de la forma $P^n (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ y todo símbolo proposicional en F por la constante proposicional **A**.

Ejemplo: Si F es

$$((x_1)((x_2)(A^2(x_1x_2)))) \supset (((x_1)(B^1(x_1)))\cdot((x_2)(B^1(x_2))))$$

su f.p.a. $F°$, es

$$(A) \supset ((A) \cdot (A))$$

A continuación enunciamos y probamos el siguiente:

LEMA: Si $\vdash F$ entonces $F°$ es una tautología (de tabla de verdad).

Prueba 1. Empezamos mostrando que todo postulado de RS_1 sólo tiene tautologías como f.p.a. Una f.p.a. de cualquier instancia de P 1 es de la forma $P° \supset (P° \cdot P°)$, que es una tautología. Lo análogo ocurre con P 2 y P 3. La f.p.a. de cualquier instancia de P 4 tiene la forma $(P° \supset Q°) \supset (P° \supset Q°)$ que es una tautología. En P 5, dado que Q difiere de P solamente en los símbolos individuales que contienen, sus f.p.a. son idénticas, luego la f.p.a. de cualquier instancia de P 5 tiene la forma $P° \supset P°$ que es una tautología.

2. A continuación se muestra que cualquier *wff* obtenida por aplicación de las reglas de RS_1 a una fórmula bien formada que tiene una tautología como f.p.a. tiene una tautología como f.p.a. Por R 2 deducimos $(x)P$ de P. Pero $(x)P$ y P tienen idénticamente la misma f.p.a. Por lo tanto, si la de P es una tautología, también lo es la de $(x)P$. Por R 1 deducimos Q a partir de P y $P \supset Q$. De modo que si $P°$ y $P° \supset Q°$ son tautologías, también lo es $Q°$.

Como todos los teoremas de RS_1 se siguen por las reglas a partir de los postulados, todos los teoremas de RS_1 tienen tautologías como f.p.a. Y con esto concluye nuestra prueba del lema.

La consistencia de RS_1 se enuncia como

METATEOREMA I. *RS_1 es consistente.*

Prueba: (Aquí usamos el criterio de Post para la consistencia: un sistema es consistente si contiene una *wff* que no es un teorema.) La fórmula "$(A) \cdot (\sim(A))$" es una *wff* de RS_1 que tiene una f.p.a. (ella misma) que no es una tautología. Luego, por nuestro lema, no es un teorema de RS_1 luego RS_1 es consistente. La consistencia de RS_1 se sigue también de su analiticidad, que (de pasada) señalamos en la Sec. 9.6.

9.2. Desarrollo de RS_1

Al desarrollar este sistema tomaremos con libertad resultados obtenidos en el Cap. 7, en donde se estableció que toda tautología puede demostrarse como un teorema en el cálculo proposicional basado en P 1, P 2, P 3 y R 1. Esto se indica en el teorema y regla derivados siguientes.

TEOREMA O. *Todas las tautologías son teoremas, y si en una tautología cualquiera T que contenga los símbolos proposicionales* $P_1, P_2, \ldots, P_n$ *reemplazamos todas las ocurrencias de* $P_1, P_2, \ldots, P_n$ *por cualesquier fórmulas bien formadas* $F_1, F_2, \ldots, F_n$, *respectivamente de* RS_1, *el resultado es un teorema F de* RS_1.

Prueba: Por la completud del Cálculo Proposicional basado en P 1, P 2, P 3 y R 1 hay en RS_1 una demostración para cada tautología. Si en cada paso de esa demostración reemplazamos todas las ocurrencias de $P_1, P_2, \ldots, P_n$ por $F_1, F_2, \ldots, F_n$ obtenemos una demostración en RS_1 de F, ya que el hacer las sustituciones indicadas en los postulados P 1, P 2, P 3 simplemente nos da otras instancias de sustitución de esos postulados.

REGLA DERIVADA O. Todas las formas de argumento tautológicamente válidas son demostrables en RS_1 y si en cualquier regla derivada tautológicamente válida $S_1, S_2, \ldots, S_m \vdash T$ que contiene los símbolos proposicionales $P_1, P_2, \ldots, P_n$ reemplazamos todas las ocurrencias de $P_1, P_2, \ldots, P_n$ respectivamente, por cualesquier *wff* F_1, $F_2, \ldots, F_n$, de RS_1, el resultado es una regla derivada que se puede demostrar válida $G_1, G_2, \ldots, G_m \vdash H$ de RS_1.

Prueba: Corre exactamente paralela a la prueba del Teo. O.

En cualquier *prueba* que se haga en RS_1 cualquier paso que se justifique por el Teo. O o DR O simplemente se denotará con Ⓟ (por "Cálculo Proposicional").

Ahora estableceremos las primeras reglas derivadas y teoremas de RS_1.

DR 1. Si P no contiene ocurrencias libres de x entonces $P \supset Q \vdash P \supset (x)Q$.

Demostración:	S_1: $P \supset Q$	premisa
	S_2: $(x)(P \supset Q)$	R 2
	S_3: $(x)(P \supset Q) \supset [P \supset (x)Q]$	P 4
	S_4: $P \supset (x)Q$	R 1

DR 2. $(x)[F(x) \supset G(x)], (x)F(x) \vdash (x)G(x)$

Demostración:	S_1: $(x)[F(x) \supset G(x)]$	premisa
	S_2: $(x)[F(x) \supset G(x)] \supset [F(x) \supset G(x)]$	P 5
	S_3: $F(x) \supset G(x)$	R 1
	S_4: $(x)F(x)$	premisa
	S_5: $(x)F(x) \supset F(x)$	P 5
	S_6: $F(x)$	R 1
	S_7: $G(x)$	R 1
	S_8: $(x)G(x)$	R 2

DR 3. $(x)(P \cdot Q) \vdash (x)P \cdot (x)Q$

Prueba:	$(x)(P \cdot Q)$	premisa
	$(x)(P \cdot Q) \supset P \cdot Q$	P 5
	$P \cdot Q$	R 1
	P	Ⓟ
	$(x)P$	R 2
	Q	Ⓟ
	$(x)Q$	R 2
	$(x)P \cdot (x)Q$	Ⓟ

DR 4. $(x)(P \equiv Q) \vdash (x)P \equiv (x)Q$

Prueba:	$(x)(P \equiv Q)$	premisa
	$(x)(P \equiv Q) \supset (P \equiv Q)$	P 5
	$P \equiv Q$	R 1
	$P \supset Q$	Ⓟ
	$(x)P \supset P$	P 5
	$(x)P \supset Q$	Ⓟ
	$(x)P \supset (x)Q$	DR 1
	$Q \supset P$	Ⓟ
	$(x)Q \supset Q$	P 5
	$(x)Q \supset P$	Ⓟ
	$(x)Q \supset (x)P$	DR 1
	$[(x)P \supset (x)Q] \cdot [(x)Q \supset (x)P]$	Ⓟ
	$(x)P \equiv (x)Q$	df.

TEOREMA 1. $\vdash (x)(P \cdot Q) \equiv (x)P \cdot (x)Q$

Prueba: Primero establecemos A:	$\vdash (x)(P \cdot Q) \supset (x)P \cdot (x)Q$	
	$\vdash (x)(P \cdot Q) \supset P \cdot Q$	P 5
	$\vdash P \cdot Q \supset P$	P 2
	$\vdash (x)(P \cdot Q) \supset P$	Ⓟ
	$\vdash (x)(P \cdot Q) \supset (x)P$	DR 1

Por pasos semejantes a los anteriores obtenemos:

	$\vdash (x)(P \cdot Q) \supset (x)Q$	
de donde	$\vdash (x)(P \cdot Q) \supset (x)P \cdot (x)Q$	Ⓟ

Ahora establecemos B: $\vdash (x)P \cdot (x)Q \supset (x)(P \cdot Q)$

$\vdash (x)P \supset P$	P 5
$\vdash (x)Q \supset Q$	P 5
$\vdash (x)P \cdot (x)Q \supset P \cdot Q$	Ⓟ
$\vdash (x)P \cdot (x)Q \supset (x)(P \cdot Q)$	DR 1

Ahora de A y B,

$\vdash [(x)(P \cdot Q) \supset (x)P \cdot (x)Q].$
$[(x)P \cdot (x)Q \supset (x)(P \cdot Q)]$ Ⓟ
$\vdash (x)(P \cdot Q) \equiv (x)P \cdot (x)Q$ df.

TEOREMA 2. $\vdash (x)(P \supset Q) \supset [(x)P \supset (x)Q]$

Prueba:	$\vdash [(x)(P \supset Q) \cdot (x)P] \supset (x)(P \supset Q)$	P 2
	$\vdash [(x)(P \supset Q) \cdot (x)P] \supset (x)P$	Ⓟ
	$\vdash (x)(P \supset Q) \supset (P \supset Q)$	P 5
	$\vdash (x)P \supset P$	P 5
	$\vdash [(x)(P \supset Q) \cdot (x)P] \supset [(P \supset Q) \cdot P]$	Ⓟ
	$\vdash [(P \supset Q) \cdot P] \supset Q$	Ⓟ
	$\vdash [(x)(P \supset Q) \cdot (x)P] \supset Q$	Ⓟ
	$\vdash [(x)(P \supset Q) \cdot (x)P] \supset (x)Q$	DR 1
	$\vdash (x)(P \supset Q) \supset [(x)P \supset (x)Q]$	Ⓟ

Ahora enunciaremos y probaremos el Teorema de Deducción para RS_1 que corresponde al método reforzado de Prueba Condicional usado en la Sec. 3.8 y los Caps. 4 y 5.

METATEOREMA II. (*Teorema de Deducción—D.T.*) *Si existe una demostración de* $P_1, P_2, \ldots, P_{n-1}, P_n \vdash Q$ *en la que ninguna variable que ocurra libre en* P_n *esté cuantificada por R 2 en ningún paso, entonces existe una demostración de* $P_1, P_2, \ldots, P_{n-1} \vdash P_n \supset Q$ *en la que exactamente están cuantificadas por R 2 aquellas variables que eran cuantificadas por R 2 en la demostración original.*

Prueba: Suponemos que existe una secuencia de las *wff* $S_1, S_2, \ldots, S_t$ tal que cada S_j $(1 \leq j \leq t)$ es (a) uno de los postulados P 1–P 5 o (b) una de las P_j $(1 \leq i \leq n)$ o (c) resulta de aplicar R 1 a dos S anteriores de la sucesión o (d) resulta de aplicar R 2 a una S anterior; y S_t es Q. Ahora, considérese la sucesión de las *wff*: $P_n \supset S_1$, $P_n \supset S_2, \ldots . P_n \supset S_t$. Si podemos completar fórmulas bien formadas antes de cada $P_n \supset S_j$ de modo que la sucesión total resultante sea una demostración a partir de $P_1, P_2, \ldots, P_{n-1}$ y de modo que cada renglón de la sucesión total resultante sea o (a) uno de los postulados P 1–P 5 o (b) uno de los P_i $(1 \leq i \leq n-1)$ o (c) resulta de aplicar R 1 a dos renglones anteriores de la sucesión o (d) resulta de aplicar R 2 a un renglón anterior de la sucesión, entonces como el último renglón $P_n \supset S_t$ es $P_n \supset Q$ tendremos una demostración de que $P_1, P_2, \ldots, P_{n-1} \vdash P_n \supset Q$.

La demostración se lleva a cabo por inducción débil sobre el número de renglones (t), en la demostración original.

(α) En el caso $t = 1$ sólo tenemos la fórmula $P_n \supset S_1$ por considerar. Deseamos mostrar que $P_1, P_2, \ldots, P_{n-1} \vdash P_n \supset S_1$. Por hipótesis, S_1 es o un Postulado P 1–P 5 o una $P_i (1 \leq i \leq n)$.

CASO 1. S_1 es un postulado. Aquí se completa con la demostración de $S_1 \supset (P_n \supset S_1)$ y S_1 misma. Partiendo de éstas tenemos $P_n \supset S_1$ por R 1, de modo que la sucesión total hasta e incluyendo $P_n \supset S_1$ es una demostración de que $\vdash P_n \supset S_1$ y luego de que $P_1, P_2, \ldots, P_{n-1} \vdash P_n \supset S_1$.

CASO 2. S_1 es una $P_i(1 \leq i \leq n)$. Aquí se completa con la demostración de $S_1 \supset (P_n \supset S_1)$ y S_1 misma, de dónde tenemos $P_n \supset S_1$ por R 1. Aquí la sucesión total es una demostración de que $S_1 \vdash P_n \supset S_1$ y como S_1 es una $P_i(1 \leq i \leq n-1)$, es una demostración de que $P_1, P_2, \ldots, P_{n-1} \vdash P_n \supset S_1$.

CASO 3. S_1 es P_n. Aquí completamos con la demostración de que $S_1 \supset S_1$ que es una demostración de que $\vdash P_n \supset S_1$ y luego de que $P_1, P_2, \ldots, P_{n-1} \vdash P_n \supset S_1$.

(β) Ahora se supone que se han completado todos los renglones $P_n \supset S_1$, $P_n \supset S_2, \ldots$ hasta $P_n \supset S_{k-1}$, inclusive, así que tenemos una sucesión de *wff* que es una demostración de que $P_1, P_2, \ldots, P_{n-1} \vdash P_n \supset S_{k-1}$. Con esta hipótesis mostramos cómo se completa para incluir $P_n \supset S_k$ en la sucesión que será entonces una demostración de que $P_1, P_2, \ldots, P_{n-1} \vdash P_n \supset S_k$. Por hipótesis S_k es o un postulado, o una $P_i(1 \leq i \leq n)$, que resultó en la demostración original de aplicar R 1 a dos S precedentes o resultó en la demostración original de aplicar R 2 a una S anterior.

CASO 1. S_k es un postulado. Completar como en el caso α.

CASO 2. S_k es una $P_i(1 \leq i \leq n)$. Completar como en el caso α.

CASO 3. S_k resulta de aplicar R 1 a dos S previas, digamos S_i y S_j donde S_j es $S_i \supset S_k$. Por la hipótesis del caso β, dado que $i < k$, $j <$ k ya se tiene $P_n \supset S_i$ y $P_n \supset S_j$, que es $P_n \supset (S_i \supset S_k)$. Aquí se inserta la demostración de $[P_n \supset (S_i \supset S_k)] \supset [(P_n \supset S_i) \supset (P_n \supset S_k)]$ (una tautología) y $P_n \supset S_k$ se sigue mediante dos aplicaciones de R 1.

CASO 4. S_k resulta de aplicar R 2 a una S anterior, digamos S_j con $j < k$. Por la hipótesis del caso β ya se tiene $P_n \supset S_j$. S_k es $(x) S_j$ donde x por nuestra hipótesis original no es libre en P_n. Luego, por R 2, $(x)(P_n \supset S_j)$ y por P 4, $(x)(P_n \supset S_j) \supset (P_n \supset (x)S_j)$. Ahora R 1 dará $P_n \supset (x)S_j$ que se $P_n \supset S_k$.

De α, β por inducción débil podemos completar *cualquier* número de pasos S_j de la demostración original. Además, ninguna variable de la sucesión "completada" está cuantificada, a menos que ya lo estuviera en la sucesión original. Esto prueba el Metateorema II (D.T.).

MT II. COROLARIO: *El D.T. como se enuncia antes vale para cualquier sistema de lógica que sólo tenga las reglas R 1 y R 2 y que contenga demostraciones para*

$P \supset P$, $P \supset (Q \supset P)$, $[P \supset (Q \supset R)] \supset [(P \supset Q) \supset (P \supset R)]$, y $(x)(P \supset Q) \supset (P \supset (x)Q)$ en donde no hay ocurrencias libres de x en P.

Prueba: Obvia.

Podemos ilustrar el *uso* del D.T., usándolo para probar DR 5:

DR 5. $(x)[F(x) \supset G(x)] \vdash (x)F(x) \supset (x)G(x)$

Prueba:	$(x)[F(x) \supset G(x)], (x)F(x) \vdash (x)G(x)$	DR 2
	$(x)[F(x) \supset G(x)] \vdash (x)F(x) \supset (x)G(x)$	D.T.

Los siguientes son algunos teoremas adicionales que es fácil establecer usando el Teorema de Deducción,

TEOREMA 3. $\vdash (x)(P \equiv Q) \supset [(x)P \equiv (x)Q]$

*TEOREMA 4. $\vdash (x)(P \supset Q) \supset [(\exists x)P \supset (\exists x)Q]$

Sus pruebas se dejan como ejercicios al lector. Ahora pasamos a algunos teoremas que enuncian equivalencias. Como $(\exists x)$ se introdujo como abreviación para $\sim(x)\sim$, el teorema que sigue,

TEOREMA 5. $\vdash (\exists x)P \equiv \sim(x)\sim P$

se infiere inmediatamente de $\vdash \sim(x)\sim P \equiv \sim(x)\sim P$ (Ⓟ) por definición.

Los teoremas siguientes, sin embargo, requieren pruebas que siendo simples no lo son tanto como la del Teorema 5.

TEOREMA 6. $\vdash (x)P \equiv \sim(\exists x)\sim P$

TEOREMA 7. $\vdash \sim(x)P \equiv (\exists x)\sim P$

TEOREMA 8. $\vdash \sim(\exists x)P \equiv (x)\sim P$

Las demostraciones de estos teoremas quedan también como ejercicios.

El teorema siguiente es respecto a la conmutación de los cuantificadores universales:

TEOREMA 9. $\vdash (x)(y)P \equiv (y)(x)P$

Prueba:	$\vdash (y)P \supset P$	P 5
	$\vdash (x)[(y)P \supset P]$	R 2
	$\vdash (x)(y)P \supset (x)P$	DR 5
	$\vdash (x)(y)P \supset (y)(x)P$	DR 1

Obtenemos $\vdash (y)(x)P \supset (x)(y)P$ de la misma manera y entonces

$\vdash (x)(y)P \equiv (y)(x)P$ por Ⓟ

Otro teorema de muy simple demostración es

TEOREMA 10. $\vdash [(x)P \vee (x)Q] \supset (x)(P \vee Q)$

Prueba:	$\vdash (x)P \supset P$	P 5
	$\vdash (x)Q \supset Q$	P 5
	$\vdash [(x)P \vee (x)Q] \supset (P \vee Q)$	Ⓟ
	$\vdash [(x)P \vee (x)Q] \supset (x)(P \vee Q)$	DR 1

Habiendo deducido varias equivalencias como teoremas, será conveniente establecer una regla de sustitución que permita el intercambio de fórmulas equivalentes en cualquier contexto. Esto se prueba como el siguiente metateorema.

METATEOREMA III. (*Regla de Reemplazo—R.R.*). *Sean* P_1, P_2, $\ldots$, P_n *cualesquier wff, sea A cualquier wff que no ocurra en ninguna* P_i, *y sea W cualquier wff que no contenga otros símbolos, además de las* $P_i (1 \leq i \leq n)$, *A*, $\cdot$, $\sim$, (x), *y paréntesis.*[2] *Sea* W^* *el resultado de reemplazar cualquier número de ocurrencias de A en W por B. Entonces* $A \equiv B \vdash W \equiv W^*$.

Prueba: Usamos inducción fuerte sobre el número de símbolos de W contando cada ocurrencia de $P_i (1 \leq i \leq n)$ A, B, $\sim$, $\cdot$, (x) como un símbolo.

α) En caso de que W contenga un solo símbolo, W es o una P_i o A.

CASO 1. W es P_i. Aquí W^* es P_i y dado que $\vdash P_i \equiv P_i$ tenemos $\vdash$ menos $W \equiv W^*$, luego $A \equiv B \vdash W \equiv W^*$.

CASO 2. W es A. Aquí W^* es A o es B.

Subcaso A: W^* es A. Como $\vdash A \equiv A$ tenemos $\vdash W \equiv W^*$, luego $A \equiv B \vdash W \equiv W^*$.

Subcaso B: W^* es B. Como $A \equiv B \vdash A \equiv B$ tenemos $A \equiv B \vdash W \equiv W^*$.

β) Ahora suponemos verdadero el Metateorema para cualquier *wff* W que contenga k o menos símbolos, y consideramos una *wff* W que contiene $k+1$ símbolos. W debe ser $\sim L$, $(x)L$ o $M \cdot N$.

CASO 1. W es $\sim L$. L debe contener solamente k símbolos, así que por la hipótesis del caso β $A \equiv B \vdash L \equiv L^*$. Pero $(L \equiv L^*) \supset (\sim L \equiv L^*)$ puede probarse, así que $A \equiv B \vdash \sim L \equiv \sim L^*$ que es $A \equiv B \vdash W \equiv W^*$.

---

[2] La última restricción no limita la generalidad del Metateorema, pues todas las ocurrencias de los símbolos definidos v, $\supset$, $\equiv$ y $\exists$ pueden reemplazarse por símbolos indefinidos.

Caso 2. W es $(x)L$. Nuevamente L sólo contiene k símbolos, de modo que por la hipótesis del caso β, $A \equiv B \vdash L \equiv L^*$. Luego, por R 2 tenemos $A \equiv B \vdash (x)(L \equiv L^*)$ y por DR 4 tenemos $(x)(L \equiv L^*) \vdash (x)L \equiv (x)L^*$, de donde $A \equiv B \vdash W \equiv W^*$.

Caso 3. W es $M \cdot N$. Como M y N contienen cada una menos de k símbolos, por la hipótesis del caso β. $A \equiv B \vdash M \equiv M^*$ y $A \equiv B \vdash N \equiv N^*$. Dado que $\vdash [(M \equiv M^*) \cdot (N \equiv N^*)] \supset [M \cdot N \equiv M^* \cdot N^*]$, y $M^* \cdot N^*$ es W^*, tenemos $A \equiv B \vdash W \equiv W^*$,

Así se completa la inducción y termina la demostración.

MT III. Corolario: *Si W y W^* son como en* MT III, *entonces* $A \equiv B$, $W \vdash W^*$. *La prueba es completamente obvia.*

9.3. Dualidad

Iniciamos nuestra discusión de la dualidad con una definición extremadamente complicada:

Df. Sea W cualquier *wff* que no contiene ocurrencias de $\supset$ o $\equiv$ (cualquier *wff* puede convertirse en una W tal reescribiendo toda parte bien formada de la forma $P \supset Q$ como $\sim P \vee Q$ y toda parte bien formada de la forma $P \equiv Q$ como $(\sim P \vee Q) \cdot (\sim Q \vee P)$. Si $P_1, \ldots, P_n$ son símbolos proposicionales o símbolos compuestos de predicados seguidos por el número apropiado de símbolos individuales, W se construirá a partir de $P_1, P_2, \ldots, P_n, \cdot, \sim, \vee, (x), (\exists x)$, exclusivamente. Entonces la *dual* de W (escrita W^Δ) se forma

reemplazando toda ocurrencia de P_i en W *por* $\sim P_i$,[3]

"	"	"	"	$\sim P_i$	"	"	"	P_i,
"	"	"	"	(x)	"	"	"	$(\exists x)$,
"	"	"	"	$(\exists x)$	"	"	"	(x),
"	"	"	"	$\cdot$	"	"	"	v,
"	"	"	"	v	"	"	"	$\cdot$

Ejemplos (donde P, Q, R, S, son P_i):

1. W: $P \cdot Q$
   W^Δ: $\sim P \vee \sim Q$
2. W: $(x)(P \vee Q)$
   W^Δ: $(\exists x)(\sim P \cdot \sim Q)$
3. W: $(y)(\exists z)[P \vee (\sim Q \vee R \cdot S)]$
   W^Δ: $(\exists y)(z)[\sim P \cdot Q \cdot (\sim R \vee \sim S)]$

---

[3] Exceptuando las ocurrencias de P_i en partes bien formadas de la forma $\sim P_i$.

Hay muchas consecuencias inmediatas de nuestra definición: Primero, si W es cualquier *wff* que no contiene partes de la forma $\sim\sim P_i$:

1. $W = W^{\Delta\Delta}$

Si W y U son *wff* cualesquiera:

2. $(W \cdot U)^{\Delta} = W^{\Delta} \vee U^{\Delta}$
3. $(W \vee U)^{\Delta} = W^{\Delta} \cdot U^{\Delta}$
4. $((x)W)^{\Delta} = (\exists x)W^{\Delta}$
5. $((\exists x)W)^{\Delta} = (x)W^{\Delta}$
6. $(\sim W)^{\Delta}$ {a. Si W es una P_i entonces $(\sim W)^{\Delta}$ es P_i. b. Si W contiene al menos dos símbolos, entonces $(\sim W)^{\Delta} = \sim(W^{\Delta})$

Podemos establecer ahora un resultado general de dualidad.

METATEOREMA .IV. (*Teorema de Dualidad*) *Si* W^{Δ} *es la fórmula dual de* W, *entonces* $\vdash \sim W \equiv W^{\Delta}$.

Prueba: Usamos inducción fuerte sobre la estructura de W (esto es, sobre el número de símbolos de W, contando cada P_i como un símbolo).

α) Si W contiene sólo un símbolo, W es una P_i. Aquí W^{Δ} es $\sim P_i$, y dado que $\vdash \sim P_i \equiv \sim P_i$ por Ⓟ, tenemos $\vdash \sim W \equiv W^{\Delta}$.

β) Suponer verdadero el Metateorema para cualquier W que contenga k o menos símbolos. Considerar ahora cualquier W que contenga $k + 1$ símbolos.

CASO 1. W es $\sim R$.

Subcaso A: R contiene más de un símbolo. Entonces $(\sim R)^{\Delta}$ es $\sim R^{\Delta}$. Por la hipótesis del caso β, $\vdash \sim R \equiv R^{\Delta}$, luego por Ⓟ $\vdash \sim\sim R \equiv \sim R^{\Delta}$, que es $\vdash \sim W \equiv W^{\Delta}$.

Subcaso B: R contiene sólo un símbolo, esto es, R es una P_i. Entonces W es $\sim P_i$ y W^{Δ} es P_i. Por Ⓟ $\vdash \sim\sim P_i \equiv P_i$, de donde $\vdash \sim W \equiv W^{\Delta}$.

CASO 2. W es $(x)R$. Por β tenemos $\vdash \sim R \equiv R^{\Delta}$. También tenemos, por Ⓟ y R.R., $\vdash \sim(x)R \equiv \sim(x)\sim\sim R$, luego por R.R., $\vdash$ $(x)R \equiv \sim(x)\sim R^{\Delta}$ que (por definición) es $\vdash \sim(x)R \equiv (\exists x)R^{\Delta}$ o $\vdash \sim W \equiv W^{\Delta}$.

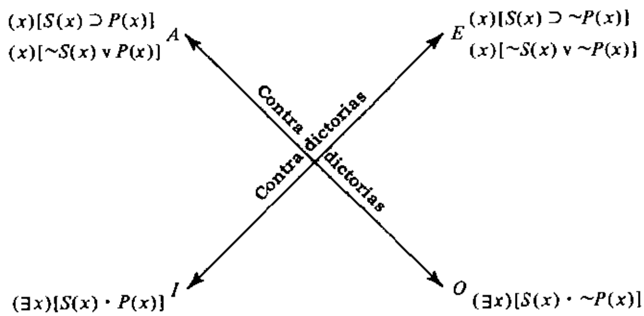
CASO 3. W es $(\exists x)R$. Por β, $\vdash \sim R \equiv R^{\Delta}$. También tenemos (Teo. 8) $\vdash \sim(\exists x)R \equiv (x)\sim R$. Por R. R. tenemos $\vdash \sim(\exists x)R \equiv (x)R^{\Delta}$ que es $\vdash \sim W \equiv W^{\Delta}$.

Caso 4. W es $A \cdot B$. Por β, $\vdash \sim A \equiv A^{\Delta}$ y $\vdash \sim B \equiv B^{\Delta}$. Por Ⓟ, $\vdash \sim(A \cdot B) \equiv \sim A \vee \sim B$, luego por R.R., $\vdash \sim(A \cdot B) \equiv A^{\Delta} \vee B^{\Delta}$ que es $\vdash \sim W \equiv W^{\Delta}$.

Caso 5. W es $A \vee B$. Por β, $\vdash \sim A \equiv A^{\Delta}$ y $\vdash \sim B \equiv B^{\Delta}$. Por Ⓟ, $\vdash \sim(A \vee B) \equiv \sim A \cdot \sim B$, de modo que por R.R., $\vdash \sim(A \vee B) \equiv A^{\Delta} \cdot B^{\Delta}$ que es $\vdash \sim W \equiv W^{\Delta}$.

MT IV. Corolario: $\vdash (W \equiv U) \supset (W^{\Delta} \equiv U^{\Delta})$.
La prueba de este corolario es obvia.

La dualidad se usa de muchas maneras. El tradicional "Cuadrado de Oposición"[4] que exhibe las proposiciones ***I*** y ***O*** como negaciones de las proposiciones ***E*** y ***A*** respectivamente, es, en forma clara, un caso especial del resultado de dualidad establecido antes:



Los teoremas familiares de De Morgan también son casos especiales del teorema de dualidad. Y el teorema general de dualilad nos permite formular las negaciones con facilidad. Por ejemplo, la proposición

Hay un curso que todos los estudiantes siguen.

puede simbolizarse como

$$(\exists x)\{C^1(x) \cdot (y)[S^1(y) \supset T^2(y, x)]\}$$

y se puede reescribir sin usar el signo de implicación, siendo entonces

$$(\exists x)\{C^1(x) \cdot (y)[\sim S^1(y) \vee T^2(y, x)]\}$$

La fórmula dual (y por tanto, la negación) de esta fórmula es

$$(x)\{\sim C^1(x) \vee (\exists y)[S^1(y) \cdot \sim T^2(y, x)]\}$$

cuya escritura "más natural" con el signo de implicación es

$$(x)\{C^1(x) \supset (\exists y)[S^1(y) \cdot \sim T^2(y, x)]\}$$

[4] Discutido en el Cap. 4, Pág. 90.

y es la traducción simbólica de la oración

Para cada curso hay algún estudiante que no lo sigue.

Establecidos la Regla de Reemplazo y el Teorema de Dualidad, fácilmente se prueban algunos teoremas adicionales.

TEOREMA 11. $\vdash (\exists x)(P \vee Q) \equiv (\exists x)P \vee (\exists x)Q$

Prueba: $\vdash (x)(\sim P \cdot \sim Q) \equiv (x)\sim P \cdot (x)\sim Q$ — Teo. 1

$\vdash (\exists x)(P \vee Q) \equiv (\exists x)P \vee (\exists x)Q$ — Corolario del Teorema de Dualidad y R 1.

Las pruebas de los siguientes dos teoremas son sencillas también y pueden quedar como ejercicios.

TEOREMA 12. $\vdash (\exists x)(\exists y)P \equiv (\exists y)(\exists x)P$

TEOREMA 13. $\vdash (\exists x)(P \cdot Q) \supset (\exists x)P \cdot (\exists x)Q$

Ahora que tenemos la Regla de Reemplazo, es deseable aumentar nuestra provisión de equivalencias. Para los siguientes diez teoremas (del Teo. 14 al Teo. 23) y la siguiente regla derivada (DR 6) hacemos la hipótesis de que *no hay ocurrencias libres de x en* Q. Daremos las pruebas de algunos de estos resultados siguientes, dejando los demás como ejercicios para el lector:

TEOREMA 14. $\vdash (x)Q \equiv Q$

Prueba: $\vdash (x)Q \supset Q$ — P 5

$\vdash Q \supset Q$ — (P)

$\vdash Q \supset (x)Q$ — DR 1

$\vdash (x)Q \equiv Q$ — (P)

TEOREMA 15. $\vdash (\exists x)Q \equiv Q$

TEOREMA 16. $\vdash (x)(P \cdot Q) \equiv (x)P \cdot Q$

Prueba: $\vdash (x)(P \cdot Q) \equiv (x)P \cdot (x)Q$ — Teo. 1

$\vdash (x)Q \equiv Q$ — Teo. 14

$\vdash (x)(P \cdot Q) \equiv (x)P \cdot Q$ — R.R.

TEOREMA 17. $\vdash (\exists x)(P \vee Q) \equiv (\exists x)P \vee Q$

Prueba: $\vdash (x)(\sim P \cdot \sim Q) \equiv (x)\sim P \cdot \sim Q$ — Teo. 16

$\vdash (\exists x)(P \vee Q) \equiv (\exists x)P \vee Q$ — Corolario del Teorema de Dualidad y R 1.

TEOREMA 18. $\vdash (\exists x)(P \supset Q) \equiv (x)P \supset Q$

TEOREMA 19. $\vdash (\exists x)(Q \supset P) \equiv Q \supset (\exists x)P$

TEOREMA 20. $\vdash (x)(Q \supset P) \equiv Q \supset (x)P$

*TEOREMA 21. $\vdash (x)(P \supset Q) \equiv (\exists x)P \supset Q$

TEOREMA 22. $\vdash (x)(P \vee Q) \equiv (x)P \vee Q$

TEOREMA 23. $\vdash (\exists x)(P \cdot Q) \equiv (\exists x)P \cdot Q$

*DR 6. $P \supset Q \vdash (\exists x)P \supset Q$

El teorema siguiente no requiere restricciones semejantes sobre las ocurrencias libres de variables en las fórmulas que el teorema contiene:

TEOREMA 24. $\vdash (\exists x)(y)P \supset (y)(\exists x)P$

Prueba:

$\vdash (x){\sim}P \supset {\sim}P$	P 5
$\vdash {\sim}{\sim}P \supset {\sim}(x){\sim}P$	Ⓟ
$\vdash P \supset {\sim}(x){\sim}P$	Ⓟ
$\vdash P \supset (\exists x)P$	df.
$\vdash (y)P \supset P$	P 5
$\vdash (y)P \supset (\exists x)P$	Ⓟ
$\vdash (y)P \supset (y)(\exists x)P$	DR 1
$\vdash (\exists x)(y)P \supset (y)(\exists x)P$	DR 6

Para los dos teoremas siguientes hacemos las hipótesis generales de que x y y son dos variables individuales cualesquiera, y $F(x)$ y $F(y)$ son exactamente iguales, excepto que x es libre en $F(x)$ en todos los lugares y sólo en los lugares en que y es libre en $F(y)$:

TEOREMA 25. $\vdash (x)F(x) \equiv (y)F(y)$

Prueba:

$\vdash (x)F(x) \supset F(y)$	P 5
$\vdash (x)F(x) \supset (y)F(y)$	DR 1

Obtenemos $\vdash (y)F(y) \supset (x)F(x)$ de la misma manera y entonces tenemos $\vdash (x)F(x) \equiv (y)F(y)$ por Ⓟ

TEOREMA 26. $\vdash (\exists x)F(x) \equiv (\exists y)F(y)$

Prueba:

$\vdash (x){\sim}F(x) \equiv (y){\sim}F(y)$	Teo. 25
$\vdash {\sim}(x){\sim}F(x) \equiv {\sim}(y){\sim}F(y)$	Ⓟ
$\vdash (\exists x)F(x) \equiv (\exists y)F(y)$	df.

Los Teoremas 25 y 26 junto con la Regla de Reemplazo permiten el "intercambio de las variables ligadas", sujeto a las restricciones mencionadas en los enunciados de los teoremas.

Finalizamos este grupo de teoremas con

TEOREMA 27. Si P y Q son como en P 5, entonces $\vdash Q \supset (\exists x)P$.

Prueba:

$\vdash (x){\sim}P \supset {\sim}Q$	P 5
$\vdash {\sim}{\sim}Q \supset {\sim}(x){\sim}P$	Ⓟ
$\vdash Q \supset {\sim}(x){\sim}P$	Ⓟ
$\vdash Q \supset (\exists x)P$	df.

9.4. RS_1 y las Técnicas de "Deducción Natural"

Ahora deseamos mostrar que RS_1 *es* una axiomatización de la lógica que *usamos* al convalidar inferencias por nuestra lista de diecinueve Reglas de Inferencia, el método reforzado de Prueba Condicional y las Reglas de Cuantificación presentadas en el Cap. 4. El sistema RS_1 contiene las diecinueve Reglas de Inferencia como se mostró mediante la prueba de la completud para el sistema de lógica basado en P 1, P 2, P 3 y R 1 y nuestra discusión relacionada con el Teo. 0 y DR 0. En cierto sentido, el Teorema de Deducción para RS_1 corresponde al método reforzado de Prueba Condicional.

En presencia de R 1, P 5 corresponde a **UI**. Las restricciones impuestas a **UI** son exactamente las mismas que las impuestas a P 5. Podemos establecer **UI** como regla derivada de RS_1:

DR 7. Si P y Q son como en P 5, entonces $(x)P \vdash Q$.

Demostración:

$(x)P$	premisa
$(x)P \supset Q$	P 5
Q	R 1

Otra vez, en presencia de R 1, **EG** se sigue de P 5 vía el Teo. 27. Las restricciones impuestas a **EG** son exactamente las mismas que se hicieron sobre P 5. Podemos establecer **EG** como regla derivada para RS_1:

DR 8. Si P y Q son como en P 5, entonces $Q \vdash (\exists x)P$.

Prueba:

Q	premisa
$Q \supset (\exists x)P$	Teo. 27
$(\exists x)P$	R 1

La regla **UG** corresponde a grandes rasgos a R 2, aunque desde cierto punto de vista parece más débil que R 2, y desde otro, más fuerte que R 2. La segunda restricción sobre **UG** evita que se le use para inferir $(\mu)\Phi\mu$ a partir de $\Phi\nu$ donde ν es una variable de ocurrencia libre en una hipótesis dentro de cuyo alcance se encuentre $\Phi\nu$. Pero no hay una restricción semejante sobre R 2. Dicha restricción sobre **UG**, sin embargo, sólo sirve para limitar su aplicación en el contexto de una Prueba Condicional. En RS_1 se impone la misma limitación haciendo la restricción sobre la Regla de Demostración Condicional misma, en nuestro enunciado del Teorema de Deducción —que no permite el paso de $P \vdash Q$ a $\vdash P \supset Q$ si R 2 se usa sobre una variable que ocurre libre en P—. Luego, en el contexto de RS_1 la segunda restricción sobre **UG** se aplica a R 2 aunque se enuncia para el Teorema de Deducción más que para R 2 misma. Así, **UG** no es realmente más débil (más restringida) que R 2.

UG parece más fuerte que R 2 en que permite un cambio de variable en su aplicación, cosa que R 2 no hace. Pero en presencia de todo el resto del sistema RS_1, **UG** se prueba con facilidad como regla derivada combinando la fuerza de R 2 y del Teo. 25. El convenio general respecto a $\Phi\mu$ y $\Phi\nu$ del Cap. 4 y la primera restricción sobre **UG** (que ν no ocurra libre en $(\mu)\Phi\mu$) en conjunto son equivalentes a las condiciones enunciadas para el Teo. 25, que $\Phi\mu$ y $\Phi\nu$ sean exactamente iguales, excepto en que μ es libre en $\Phi\mu$ en los lugares y sólo aquellos lugares en que ν es libre en $\Phi\nu$. Tenemos $F(x) \vdash (x)F(x)$ directamente por R 2 y luego por el Teo. 25 tenemos DR 9. Si $F(x)$ y $F(y)$ son exactamente iguales, excepto en que x

> es libre en $F(x)$ en aquellos y sólo en aquellos lugares en que y es libre en $F(y)$, entonces $F(x) \vdash (y)F(y)$.

En RS_1 podemos hacer mediante DR 9 todo lo que antes podíamos hacer mediante **UG**.

En el Teo. 0 y DR 0, y en DR 7, DR 8, DR 9 y el Teorema de Deducción, se ve que el sistema RS_1 comprende toda la fuerza deductiva disponible en nuestras diecinueve Reglas de Inferencia, Reglas de Cuantificación **UI**, **EG**, **UG** y el principio reforzado de la Prueba Condicional.

En vez de tratar de formular una regla derivada en RS_1 correspondiente a **EI**, probamos un metateorema que legitimiza cualquier uso de **EI** en una prueba sometida a las restricciones que se involucran en su enunciado.

METATEOREMA V. (**EI** es legítima, o mejor aún, **EI** es eliminable o evitable.)

Si hay una sucesión de fórmulas bien formadas que constituirían una demostración de que $P_1, P_2, \ldots, P_n \vdash Q$ si no fuera porque algunas de las fórmulas de la sucesión se derivan de las precedentes por medio de **EI** *(construida aquí simplemente como la regla de que si R se puede derivar en un contexto dado, de $F(y)$, entonces se le puede derivar en ese contexto de $(\exists x)F(x)$ de modo que:*

1. *haya m usos de* **EI** *de los cuales el i-ésimo es la inferencia de R_i a partir de $(\exists x_i)F(x_i)$ sobre la base de haberle de-*

ducido de $F_i(y_i)$, *donde las* x_i *libres en* $F_i(x_i)$ *exactamente corresponden a las* y_i *libres en* $F_i(y_i)$, *y*

2. *ninguna* y_i *ocurra libre ni en* Q, *ni en cualquier premisa* P_j, *ni en cualquier wff de la sucesión que precede a* $F_i(y_i)$, *ni en la wff* R_i *que se deduce de* $F_i(y_i)$;

entonces existe una demostración genuina de que $P_1, P_2, \ldots, P_n \vdash Q$ *que no hace uso de* **EI**. *Y en esta última (genuina) demostración no se hace uso de* R 2 *para cuantificar variables libres en* $P_1, P_2, \ldots, P_n$, *que no fueran ya cuantificadas por* R 2 *en la sucesión original o "cuasidemostración".*

Prueba: En cualquier cuasidemostración semejante cada *wff* $F_i(y_i)$ está precedida por una *wff* $(\exists x_i)F_i(x_i)$ y seguida por una *wff* R_i. Exceptuando las *m fórmulas* $F_1(y_1), F_2(y_2), \ldots, F_m(y_m)$ cada *wff* de la sucesión indicada o es un axioma o una P_j o se sigue de las precedentes *wff* por R 1 o R 2. Supongamos que hay exactamente t usos de R 2 de los cuales el q-ésimo es la inferencia de $S_{k_q}(= (x_{j_q})S_{j_q})$ a partir de S_{j_q}.

Definimos S'_{k_q} como $(x_{j_1}) \ldots (x_{j_{q-1}})(x_{j_{q+1}}) \ldots (x_{j_t})S_{k_q}$ que es $(x_{j_1}) \ldots (x_{j_{q-1}})(x_{j_{q+1}}) \ldots (x_{j_t})(x_{j_q})S_{j_q}$. Dado que $S'_{k_q} \vdash S_{k_q}$ por $t-1$ usos de P 5 y R 1, es obvio de la existencia de la cuasidemostración original que existe una demostración genuina de que

$$(1) \qquad P_1, P_2, \ldots, P_n, S'_{k_1}, S'_{k_2}, \ldots, S'_{k_t}, F_1(y_1), F_2(y_2), \ldots, F_m(y_m) \vdash Q$$

que no involucra el uso de **EI** o R 2. (Si $F_i(y_i)$ ocurría sin justificación en la cuasidemostración, aquí es una premisa; y si S_{k_q} se infería por R 2, aquí se le infiere de la premisa S'_{k_q} por $t-1$ usos de P 5 y R 1.)

Como no se hace uso de R 2 en la demostración de (1), podemos hacer uso del Teorema de Deducción para obtener

$$(1) \quad P_1, P_2, \ldots, P_n, S'_{k_1}, S'_{k_2}, \ldots, S'_{k_t}, F_1(y_1), F_2(y_2), \ldots, F_{m-1}(y_{m-1}) \vdash F_m(y_m) \supset Q$$

Ahora, por aplicaciones sucesivas de R 2, y de los Teos. 21 y 26, y de la Regla de Reemplazo, de esas mismas premisas obtenemos

$$\vdash (y_m)[F_m(y_m) \supset Q]$$

y después

$$\vdash (\exists y_m)F_m(y_m) \supset Q$$

y finalmente

$$\vdash (\exists x_m)F_m(x_m) \supset Q$$

Dado que $F_m(y_m)$ está precedida por $(\exists x_m)F_m(x_m)$ en la cuasidemostración original, tenemos también

$$\vdash (\exists x_m)F_m(x_m)$$

y finalmente por R 1

$$\vdash Q$$

Luego tenemos una demostración de que

(2) $P_1, P_2, \ldots, P_n, S'_{k_1}, S'_{k_2}, \ldots, S'_{k_t}, F_1(y_1), F_2(y_2), \ldots, F_{m-1}(y_{m-1}) \vdash Q$

en donde R 2 no se usa para cuantificar ninguna variable libre en ninguna de las premisas S'_{k_1}, $S'_{k_2}, \ldots, S'_{k_t}$, $F_1(y_1)$, $F_2(y_2), \ldots,$ $F_{m-1}(y_{m-1})$. El argumento anterior se puede usar m veces para obtener una demostración de que

(m) $$P_1, P_2, \ldots, P_n, S'_{k_1}, S'_{k_2}, \ldots, S'_{k_t} \vdash Q$$

en la que no se usa R 2 para cuantificar ninguna variable libre en ninguna de las premisas S'_{k_1}, S'_{k_2}, $\ldots, S'_{k_t}$. Luego podemos usar nuevamente el Teorema de Deducción para obtener

$$P_1, P_2, \ldots, P_n, S'_{k_1}, S'_{k_2}, \ldots, S'_{k_{t-1}} \vdash S'_{k_t} \supset Q$$

Dado que S_{j_k} precedía a S_{k_t} en la cuasidemostración original, también, de las mismas premisas, obtenemos

$$\vdash S_{j_t}$$

Ahora, por t aplicaciones de R 2, obtenemos

$$\vdash S'_{k_t}$$

y finalmente por R 1

$$\vdash Q$$

Así, tenemos una demostración de que

$(m+1)$ $$P_1, P_2, \ldots, P_n, S'_{k_1}, S'_{k_2}, \ldots, S'_{k_{t-1}} \vdash Q$$

en donde R 2 no se usa para cuantificar variables que sean libres en cualquiera de las premisas S'_{k_1}, $S'_{k_2}, \ldots, S'_{k_t}$. El argumento anterior se puede usar t veces para obtener una demostración genuina de que

$(m+t)$ $$P_1, P_2, \ldots, P_n \vdash Q$$

en la que no se usa R 2 para cuantificar variables libres en P_1, P_2, $\ldots, P_n$ que no fueran cuantificadas por R 2 en la cuasidemostración original. Esto completa la prueba de nuestro Metateorema V.

La discusión precedente basta para mostrar que nuestro cálculo funcional de primer orden RS_1 es una axiomatización de la lógica *usada* en el Cap. 4 y las tres primeras secciones del Cap. 5. Se puede mostrar que no contiene *más* de lo que allí se usaba, dando demostraciones (en el sentido anterior de "demostración") de los postulados de RS_1.

Surge por supuesto la pregunta de *qué tanta* lógica hay contenida en RS_1. Presentaremos una prueba de que RS_1 es deductivamente completo en el sentido de que todas las proposiciones lógicamente verdaderas que sólo involucran cuantificación de variables individuales son susceptibles de probarse como teoremas, dentro del mismo. Este sentido se especificará con más precisión en la Sec. 9.6. Sin embargo, antes de probar la completud de nuestro cálculo funcional de primer orden desarrollaremos algunas nociones y metateoremas concernientes al tema de las "Formas Normales".

9.5. Formas Normales

Empezamos definiendo la noción de "forma normal prenex". Una fórmula bien formada está en *forma normal prenex* si y sólo si tiene la estructura $(Qx_1)(Qx_2)\ldots(Qx_n)G$, donde $x_1, x_2, \ldots, x_n$ son variables individuales distintas, (Qx_i) es (x_i) o $(\exists x_i)$ y G es una fórmula bien formada que no contiene cuantificadores y que al menos contiene una ocurrencia de cada una de las x_i. Las siguientes son muestras de fórmulas de RS_1 en forma normal prenex

$$(x)(A^1(x))$$
$$(\exists x)((B^1(x)) \supset (C^2(xy)))$$
$$(y)((\exists z)(\sim(A^3(xyz))))$$

Ahora definimos el término "alcance" como sigue: Si $(Qx)B$ es una parte bien formada (es decir, una *wff* que es una parte) de una *wff* A, entonces el alcance de esa ocurrencia particular de (Qx) en A es la ocurrencia particular de B que sigue inmediatamente a (Qx).[5] Y definimos la frase "inicialmente situado" de la manera siguiente: Un cuantificador está inicialmente situado en una *wff* F si se encuentra al comienzo de F o sólo se encuentra precedida (con excepción de los paréntesis) por otros cuantificadores, y su alcance llega hasta el final de la fórmula F. Deberá ser claro para el lector que la siguiente es una definición equivalente de "forma normal prenex": Una *wff* está en *forma normal prenex* si y sólo si todos

[5] Esta definición provee una formulación precisa de la noción de alcance que se discutió de manera informal en la Sec. 4.4. Véanse las páginas tercera y cuarta de esa sección.

sus cuantificadores están inicialmente situados, no hay dos cuantificadores sobre la misma variable, y cada variable que ocurre en un cuantificador ocurre también al menos una vez dentro del *alcance* de ese cuantificador.

Ahora podemos enunciar y probar el siguiente Metateorema.

METATEOREMA VI. *Dada cualquier wff F, de RS_1, puede encontrarse una fórmula P en forma normal prenex, tal que* $\vdash F \equiv P$.

Prueba: Si F está en forma normal prenex, P es F y $\vdash F \equiv P$ por Ⓟ.

Si F no está en forma normal prenex, debe o: (a) contener un cuantificador no inicialmente situado, o (b) contener dos cuantificadores sobre la misma variable, o (c) contener una variable que ocurre *sólo* en un cuantificador.

CASO 1. Todos los cuantificadores de F están inicialmente colocados.

Subcaso 1.i. Al menos dos de los cuantificadores están sobre la misma variable. Aquí F es de la forma

$$(Qx_1)(Qx_2)\ldots(Qx_i)\ldots(Qx_i)\ldots(Qx_n)G$$

Si todo lo que en F inmediatamente sigue a (Qx_i) lo denotamos con A, entonces x_i no ocurre libre en A, y por los Teos. 14 y 15, $\vdash (Qx_i) A \equiv A$. Luego por la Regla de Reemplazo el primero de cualesquier cuantificadores inicialmente colocados sobre la misma variable puede simplemente quitarse dando lugar a una fórmula equivalente. Luego, si todos los cuantificadores de F están inicialmente colocados, entonces hay una fórmula equivalente cuyos cuantificadores están todos inicialmente colocados y que a lo más tiene un cuantificador sobre cualquier variable.

Subcaso 1.ii. Hay en F una variable que ocurre sólo en un cuantificador. Aquí tenemos F de la forma

$$(Qx_1)\ldots(Qx_i)\ldots(Qx_n)G$$

donde x_i no ocurre libre en G. Si denotamos con A todo lo que en F inmediatamente sigue a (Qx_i), entonces x_i no ocurre libre en A y por el Teo. 14 o el Teo. 15, $\vdash (Qx_i)A \equiv A$. Luego, por la Regla de Reemplazo todo cuantificador inicialmente colocado sobre una variable que no tiene ocurrencia fuera de ese cuantificador puede simplemente quitarse dando lugar a una fórmula equivalente. Luego si todos los cuantificadores de F están inicialmente colocados, entonces hay una fórmula equivalente cuyos cuantificadores todos están inicialmente colocados y que no contiene variables cuyas únicas ocurrencias sean en cuantificadores.

CASO 2. Algunos cuantificadores de F no están inicialmente colocados. En este caso conviene escribir F en forma no abreviada, de modo que los únicos símbolos del cálculo proposicional que contiene son $\cdot$ y $\sim$. Después consideramos una *wff* G tal que no haya dos cuantificadores en G sobre la misma variable, tal que ninguna variable que aparece en G tenga ocurrencias libres tanto como ligadas y $\vdash F \equiv G$. Si F es una *wff* tal, tomamos G como F; de otra manera G se obtiene de F intercambiando variables ligadas de acuerdo con los Teos. 25 y 26 y la Regla de Reemplazo.

Aparte los paréntesis, cada símbolo que no sea un cuantificador y que ocurra a la izquierda de un cuantificador dado (Qx_j) en una *wff* G puede contarse como una "razón" por la que (Qx_j) no está inicialmente colocado en G, y cada símbolo colocado a la derecha de (Qx_j) en G, que no esté dentro de su alcance también puede contarse como una "razón" de que (Qx_j) no esté inicialmente colocado en G. Es obvio que cualquier cuantificador (Qx_j) que aparezca en una *wff* G está inicialmente colocado en G si y sólo si no hay "razón" por la que no esté inicialmente colocado en G.

Dada cualquier *wff* G en la cual el cuantificador sobre x_j no esté inicialmente colocado y todos los cuantificadores en G que preceden al cuantificador sobre x_j estén inicialmente colocados en G, podemos construir una *wff* G_1 tal que: todo cuantificador inicialmente colocado en G esté también inicialmente colocado en G_1, $\vdash G \equiv G_1$ y hay menos "razones" por las que el cuantificador x_j no esté inicialmente colocado en G_1 que "razones" por las que el cuantificador x_j no estaba inicialmente colocado en G. La construcción de G_1 es como sigue.

Si (Qx_j) es el primer cuantificador en G que no está inicialmente colocado en G, entonces puede ocurrir en sólo una de las partes bien formadas de G que siguen: $((Qx_j)(A))\cdot(B)$ o $(B)\cdot((Qx_j)(A))$ o $\sim((Qx_j)(A))$.

En el primer caso, como x_j no tiene ocurrencia libre en B reemplazamos la parte bien formada $((Qx_j(A))\cdot(B)$ por $(Qx_j)((A)\cdot(B))$ usando el Teo. 16 o el Teo. 23 y la Regla de Reemplazo, para obtener la *wff* G_1.

En el segundo caso, primero usamos Ⓟ y la Regla de Reemplazo para reemplazar la parte bien formada $(B)\cdot((Qx_j)(A))$ por $((Qx_j)(A))\cdot(B)$, y luego reemplazar eso como en el caso precedente por $(Qx_j)((A)\cdot(B))$ para obtener la *wff* G_1.

En el tercer caso obtenemos la *wff* G_1 usando el Teo. 7 o el Teo. 8 y la Regla de Reemplazo para reemplazar la parte bien formada $\sim((Qx_j)(A))$ por $(Q^*x_j)(\sim(A))$ donde (Q^*x_j) es o (x_j) o $(\exists x_j)$ según que (Qx_j) sea $(\exists x_j)$ o (x_j).

Si el cuantificador sobre x_j no está inicialmente colocado en G_1 repetimos la construcción recién descrita para obtener G_2 en la cual hay aún menos "razones" de que el cuantificador sobre x_j no esté inicialmente colocado. Como cada *wff* contiene sólo un número finito de símbolos, en cualquier *wff* no puede haber sino un número finito de razones de que un cuantificador no esté inicialmente colocado. Así pues, la construcción que hemos descrito sólo deberá ser repetida un número finito de veces para producir una *wff* G_k en la que el cuantificador sobre x_j esté inicialmente colocado.

Para cada cuantificador que no esté inicialmente colocado en la *wff* F original, puede ser usada una nueva serie de construcciones hasta finalmente obtener una *wff* G_k en la que todos los cuantificadores estén inicialmente colocados y tal que $\vdash F \equiv G_k$. Y por el Caso 1 existe una *wff* en forma normal prenex que es equivalente a G_k.

Ahora definiremos dos nuevos términos: En cualquier *wff* en forma normal prenex

$$(Qx_1)(Qx_2)\ldots(Qx_n)G$$

el grupo de los cuantificadores $(Qx_1)(Qx_2)\ldots(Qx_n)$ es el prefijo y la fórmula G, libre de cuantificadores, es la *matriz*.

EJERCICIOS

Encontrar una forma normal prenex para

1. $(x)(\exists y)(\exists x)(y)[(z)G(z)\cdot F(x) \supset (\exists z)H(z)\cdot F(z)]$

***2.** $[(x)G(x) \vee H(y)] \equiv [(y)(z)F(y,z)]$

3. $(x)[F(x) \supset G(x)] \supset [(x)F(x) \supset (x)G(x)]$

***4.** $(y)(\exists x)F(x,y) \supset (\exists x)(y)F(x,y)$

5. $(x_1)(\exists x_2)(x_3)(\exists x_4)(x_5)[P^6(x_1,\ldots,x_6) \supset (z_1)(\exists x)(\exists z)H(x_1,z)]$

Una *wff* en forma normal prenex puede contener variables libres. Deseamos que sea posible, sin perder generalidad, limitarnos a las *wff* que no contienen variables libres. A éstas nos referiremos como *fórmulas bien formadas cerradas* o *wff cerradas* (que abreviaremos *cwff*). Para que nuestra concentración en las *cwff* sea legítima enunciaremos y demostraremos el siguiente:

METATOREMA VII. *Para toda wff F puede encontrarse una cwff G, en forma normal prenex tal que* $\vdash F$ *si y sólo si* $\vdash G$.

Prueba: Por el Metateorema VI es siempre posible encontrar la forma normal prenex P para toda *wff* tal que $\vdash F \equiv P$.

CASO 1. Si P es una *cwff*, entonces G es la misma P y como $\vdash F \equiv G$, $\vdash F$ si y sólo si $\vdash G$.

CASO 2. Si P contiene n variables libres $x_1, x_2, \ldots, x_n$, entonces G es la *cwff* $(x_1)(x_2) \ldots (x_n)P$. Pues si $\vdash F$ entonces $\vdash P$ y por R 2, $\vdash (x_n)P$ y aplicando n veces la R 2 tenemos $\vdash G$. Y si $\vdash G$, esto es, $\vdash (x_1)(x_2) \ldots (x_n)P$, entonces, dado que $\vdash (x_1)(x_2) \ldots (x_n)P \supset (x_2) \ldots (x_n)P$ por P 5, R 1 da $\vdash (x_2) \ldots (x_n)P$, y aplicando n veces P 5 y R 1, tenemos $\vdash P$, y luego $\vdash F$.

Ahora probamos otro resultado más que para cualquier *wff* da una *wff* en forma normal aún más especializada que será un teorema si y sólo si la *wff* original es un teorema.

METATEOREMA VIII. *Para cualquier wff F puede encontrarse una cwff R que esté en forma normal prenex y empiece con un cuantificador existencial y tal que* $\vdash F$ *si y sólo si* $\vdash R$.

Prueba: Por el Metateorema VII, para cualquier *wff* F hay una *cwff* G en forma normal prenex tal que $\vdash F$ si y sólo si $\vdash G$. Sea $D(t)$ una función de una variable t tal que ni D ni t ocurran en G. Entoncer por Ⓟ, $\vdash G \equiv \{G \cdot [D(t) \supset D(t)]\}$.

Luego

$\vdash G \supset \{G \cdot [D(t) \supset D(t)]\}$	por Ⓟ
$\vdash (\exists t)\{G \supset \{G \cdot [D(t) \supset D(t)]\}\}$	por DR 8, (EG)
$\vdash G \supset (\exists t)\{G \cdot [D(t) \supset D(t)]\}$	por Teo. 19 y R.R.

También tenemos

$\vdash \{G \cdot [D(t) \supset D(t)]\} \supset G$	P 2
$\vdash (t)\{\{G \cdot [D(t) \supset D(t)]\} \supset G\}$	R 2
$\vdash (\exists t)\{G \cdot [D(t) \supset D(t)]\} \supset G$	Teo. 21 y R.R.

Luego

$\vdash (\exists t)\{G \cdot [D(t) \supset D(t)]\} \equiv G$	por Ⓟ

Ahora, la forma normal prenex de $(\exists t)\{G \cdot [D(t) \supset D(t)]\}$ es la fórmula de *tipo R* que se deseaba, ya que es cerrada, se encuentra en forma normal prenex, empieza con un cuantificador existencial, y $\vdash F$ si y sólo si $\vdash R$. Si G es $(Qx_1)(Qx_2) \ldots (Qx_n)G'$, entonces

$\vdash (\exists t)\{G \cdot [D(t) \supset D(t)]\}$ o

$\vdash (\exists t)\{[(Qx_1)(Qx_2) \ldots (Qx_n)G'] \cdot \sim[D(t) \cdot \sim D(t)]\}$

tiene como su forma normal prenex

$$\vdash (\exists t)(Qx_1)(Qx_2)\ldots(Qx_n)\{G'\cdot\sim[D(t)\cdot\sim D(t)]\}$$

por aplicación reiterada del Teo. 16 o el Teo. 23 y la Regla de Reemplazo.

Por definición, cualquier *cwff* en forma normal prenex que comienza con un cuantificador existencial se dirá que es *de tipo R.*

EJERCICIOS

Para cada una de las siguientes *wff* construir una fórmula *de tipo R* que sea un teorema si y sólo si la *wff* dada es un teorema:

*1. $(x)(y)(z)\{[H(x) \vee H(y)] \vee H(z)\}$

2. $F(x_1, x_2, \ldots, x_n) \supset G(z)$

*3. $(\exists x)G(x, y) \vee F(z)$

4. $(\exists z)F(z, z) \supset (x)G(x, y)$

5. $(x)F(x, y) \supset G(z)$

A continuación presentamos tres nuevas definiciones, la tercera de las cuales define la "forma normal de Skolem" que es un tipo aún más especializado de fórmula bien formada, respecto de la cual estableceremos un Metateorema más.

Df. El *rango de una ocurrencia de un cuantificador existencial* en una fórmula *de tipo R* es el número de cuantificadores existenciales universales que preceden a ese cuantificador existencial en el prefijo.

Df. El *rango de una fórmula de tipo R* es el mayor de los rangos de las ocurrencias de los cuantificadores existenciales de su prefijo.

Df. Una *wff F* está en la *forma normal de Skolem* si y sólo si es *de tipo R* y de rango 0.

METATEOREMA IX. *Dada cualquier wff F podemos encontrar una fórmula F_0 en forma normal de Skolem tal que $\vdash F$ si y sólo si $\vdash F_0$.*

Prueba: Para cualquier *wff F* podemos construir una fórmula *de tipo R*, llamémosla F_1, tal que $\vdash F$ si y sólo si $\vdash F_1$. (Si F es ya de tipo R, entonces $F = F_1$.) Si F_1 es de rango 0 entonces está en la forma normal de Skolem deseada. Si F_1 es de rango $k > 0$, entonces mostramos cómo construir una fórmula *de tipo R* de rango menor que k, llámesele F_2, tal que $\vdash F_1$ si y sólo si $\vdash F_2$. Así, nos embarcamos en un proceso que producirá las fórmulas F_3, F_4, $F_5, \ldots$ todas *de tipo R* y de rangos decrecientes. Llegaremos finalmente a una fórmula F_0 *de tipo R* y de rango 0 tal que $\vdash F$ si y sólo si $\vdash F_0$.

Si F_1 no está en la forma normal de Skolem, entonces su rango es mayor que 0, es decir que F_1 tiene la estructura

$$(\exists x_1)(\exists x_2)\ldots(\exists x_n)(y)(Qz_1)(Qz_2)\ldots(Qz_m)G$$

donde $(Qz_1)(Qz_2), \ldots, (Qz_m)$ son cuantificadores de las cuales uno al menos es existencial. Ahora introducimos las siguientes notaciones:

1. $B(x_1, x_2, \ldots, x_n, y) = \mathrm{df}\,(Qz_1)(Qz_2)\ldots(Qz_m)G$. Esto lo abreviaremos como A.
2. $H(y) = \mathrm{df}\,H(x_1, x_2, \ldots, x_n, y)$ en donde H es cualquier variable de predicado con $(n+1)$ lugares (y en argumentos $x_1, x_2, \ldots, x_n, y$) y tal que H no aparece en G.
3. $H(t) = \mathrm{df}\,H(x_1, x_2, \ldots, x_n, t)$ donde t es una variable que no ocurre en G.
4. $C = \mathrm{df}\,(\exists x_1)(\exists x_2)\ldots(\exists x_n)\{(y)[(Qz_1)(Qz_2)\ldots(Qz_m)G \supset H(y)] \supset (t)H(t)\}$

Primero, queremos mostrar que $\vdash F_1$ si y sólo si $\vdash C$. Las dos implicaciones son

(i) Si $\vdash F_1$ entonces $\vdash C$. Aquí probamos que $\vdash F_1 \supset C$.

$\vdash A \supset \{[A \supset H(y)] \supset H(y)\}$	Ⓟ
$\vdash (y)\{A \supset \{[A \supset H(y)] \supset H(y)\}\}$	R 2
$\vdash (y)A \supset (y)\{[A \supset H(y)] \supset H(y)\}$	DR 5
$\vdash (y)A \supset \{(y)[A \supset H(y)] \supset (y)H(y)\}$	Teo. 2, Ⓟ
$\vdash (y)A \supset \{(y)[A \supset H(y)] \supset (t)H(t)\}$	Teo. 25, R.R.
$\vdash (x_n)\{(y)A \supset \{(y)[A \supset H(y)] \supset (t)H(t)\}\}$	R 2
$\vdash (\exists x_n)(y)A \supset (\exists x_n)\{(y)[A \supset H(y)] \supset (t)H(t)\}$	Teo. 4, R 1
. . . .	
. . . .	
$\vdash (\exists x_1)(\exists x_2)\ldots(\exists x_n)(y)A \supset (\exists x_1)(\exists x_2)\ldots(\exists x_n)\{(y)[A \supset H(y)] \supset (t)H(t)\}$	por n usos de R 2, Teo. 4, R 1
$\vdash F_1 \supset C$	df.

Luego, si $\vdash F_1$, entonces $\vdash C$.

(ii) Si $\vdash C$, entonces $\vdash F_1$. Aquí debemos suponer que $\vdash C$ y deducir $\vdash F_1$.

$\vdash (\exists x_1)\ldots(\exists x_n)\{(y)[(Qz_1)\ldots(Qz_m)G \supset H(y)] \supset (t)H(t)\}$	C
$\vdash (\exists x_1)\ldots(\exists x_n)\{(y)[B(x_1, \ldots, x_n, y) \supset H(x_1, \ldots, x_n, y)] \supset (t)H(x_1, \ldots, x_n, t)\}$	df.
$\vdash (\exists x_2)\ldots(\exists x_n)\{(y)[B(x'_1, \ldots, x_n, y) \supset H(x'_1, \ldots, x_n, y)] \supset (t)H(x'_1, \ldots, x_n, t)\}$	EI
. . . .	
$\vdash (y)[B(x'_1, \ldots, x'_n, y) \supset H(x'_1, \ldots, x'_n, y)] \supset (t)H(x'_1, \ldots, x'_n, t)$	n usos de EI

Ahora sustituimos $B(x_1', \ldots, x_n', y)$ por la variable predicativa $H(x_1', \ldots, x_n', y)$[6]

$\vdash (y)[B(x_1', \ldots, x_n', y) \supset B(x_1', \ldots, x_n', y)] \supset (t)B(x_1', \ldots, x_n', t)$	
$\vdash (y)[B(x_1', \ldots, x_n', y) \supset B(x_1', \ldots, x_n', y)] \supset (y)B(x_1', \ldots, x_n', y)$	Teo. 25, R.R.
$\vdash (\exists y)\{[B(x_1', \ldots, x_n', y) \supset B(x_1', \ldots, x_n', y)] \supset (y)B(x_1', \ldots, x_n', y)\}$	Teo. 18, R.R.
$\vdash [B(x_1', \ldots, x_n', y) \supset B(x_1', \ldots, x_n', y)] \supset (y)B(x_1', \ldots, x_n', y)$	**EI**
$\vdash B(x_1', \ldots, x_n', y) \supset B(x_1', \ldots, x_n', y)$	Ⓟ
$\vdash (y)B(x_1', \ldots, x_n', y)$	R I
$\vdash (\exists x_n)(y)B(x_1', \ldots, x_n, y)$	DR 8, (**EG**)
. . . .	
$\vdash (\exists x_1) \ldots (\exists x_n)(y)B(x_1, \ldots, x_n, y)$	n usos de **EG**
$\vdash (\exists x_1) \ldots (\exists x_n)(y)(Qz_1) \ldots (Qz_m)G$	df.
$\vdash F_1$	df.

Luego, si $\vdash C$, entonces $\vdash F_1$.

C no está en forma normal prenex. Su forma normal prenex se construye como sigue, usando la notación Q^* que ahora definimos:

Si (Qz_i) es (z_i) entonces (Q^*z_i) es $(\exists z_i)$
Si (Qz_i) es $(\exists z_i)$ then (Q^*z_i) es (z_i)

$$C \equiv (\exists x_1) \ldots (\exists x_n)\{(y)[(Qz_1)(Qz_2) \ldots (Qz_m)G \supset H(y)] \supset (t)H(t)\}$$

Dado que $H(y)$ no contiene z_i libres,

$$\vdash (Qz_1) \ldots (Qz_m)G \supset H(y) \equiv (Q^*z_1) \ldots (Q^*z_m)[G \supset H(y)]$$

por m aplicaciones del Teo. 18 o el Teo. 21. Luego, por la Regla de Reemplazo

$$C \equiv (\exists x_1) \ldots (\exists x_n)\{(y)(Q^*z_1) \ldots (Q^*z_m)[G \supset H(y)] \supset (t)H(t)\}$$

Dado que $(t)H(t)$ no contiene z_i libres,

$$\vdash \{(y)(Q^*z_1) \ldots (Q^*z_m)[G \supset H(y)] \supset (t)H(t)\} \equiv \{(\exists y)(Qz_1) \ldots (Qz_m)[[G \supset H(y)] \supset (t)H(t)]\}$$

por $m + 1$ aplicaciones del Teo. 18 o el Teo. 21. Luego, por la Regla de Reemplazo

$$C \equiv (\exists x_1) \ldots (\exists x_n)(\exists y)(Qz_1) \ldots (Qz_m)[[G \supset H(y)] \supset (t)H(t)]$$

Como t no es libre en $G \supset H(y)$, por el Teo. 20,

$$\vdash [[G \supset H(y)] \supset (t)H(t)] \equiv (t)[[G \supset H(y)] \supset H(t)],$$

[6] La regla que rige una sustitución tal (regla de sustitución para variables funcionales) es difícil y de expresión complicada. Como es ésta muestra única aplicación de la misma, no la enunciaremos aquí. Puede encontrarse un estudio de las formulaciones alternativas en A. Church, *Introduction to Mathematical Logic I*, Princeton, 1956, Págs. 235 y sigs., 342 y sigs. 351 y sigs.

luego, por la Regla de Reemplazo,

$$C \equiv (\exists x_1) \ldots (\exists x_n)(\exists y)(Qz_1) \ldots (Qz_m)(t)[[G \supset H(y)] \supset H(t)]$$

La fórmula de la derecha es la fórmula F_2 *de tipo* R tal que $\vdash F$ si y sólo si $\vdash F_2$. Ahora, el rango de F_2 es inferior al rango de F_1, pues sus prefijos son los mismos salvo que F_2 tiene un cuantificador universal adicional en la posición final, que no afecta el rango, y uno de los cuantificadores universales $((y))$ que precedía a un cuantificador existencial ha sido reemplazado por un cuantificador existencial, lo que reduce el rango en uno. Si F_2 tiene rango 0, entonces es la forma normal de Skolem de F. Si no lo es, entonces puede repetirse el argumento para obtener una fórmula F_3 *de tipo* R de rango aún más bajo. Luego, podemos finalmente llegar a una fórmula *de tipo* R de rango 0, que es la forma normal de Skolem deseada.

EJERCICIOS

Encontrar una forma normal de Skolem para

*1. $(\exists x)(y)(\exists z)[F(x, y) \vee G(z)]$
2. $(x)F(x) \supset [(\exists y)G(y) \supset (z)H(z)]$
*3. $(x)(\exists y)F(x, y)$
4. $(x)(y)(\exists z)(\exists x)\{[[F(x) \cdot G(y)] \vee H(z)] \supset I(w)\}$
5. $(\exists x_1)(x_2)(x_3)(\exists x_4)F(x_1, x_2, x_3, x_4)$

9.6. Completud de RS_1

Ahora nos ocuparemos del problema de probar que nuestro cálculo funcional de primer orden es completo. Hay que distinguir entre varios sentidos del término "completo". Un sistema del cual *todas* las fórmulas bien formadas se pueden probar como teoremas posee una completud de una clase muy fuerte. Pero esta clase de completud equivale a la inconsistencia y luego no es deseable. Nuestro primer Metateorema, que estableció la consistencia de nuestro sistema, probó de pasada que carecía de *este* tipo de completud. Una completud de una clase un tanto más débil es la que posee un sistema cada una de cuyas fórmulas bien formadas es susceptible de probarse como teorema, o bien, su negación puede probarse como teorema; es decir, que para toda *wff* F se tiene o $\vdash F$ o bien $\vdash \sim F$. Esta clase de compleción tampoco es deseable, pues en sus interpretaciones normales, cada una de las siguiente *wff*

N_1: $(\exists x)F(x) \supset (x)F(x)$
N_2: $(\exists x)(\exists y)\{F(x)\cdot F(y)\cdot [G(x) \equiv \sim G(y)]\} \supset (x)F(x)$
N_3: $(\exists x)(\exists y)(\exists z)\{F(x)\cdot F(y)\cdot F(z)\cdot [G(x) \equiv \sim G(y)]\cdot$
$[H(y) \equiv \sim H(z)]\cdot [I(x) \equiv \sim I(z)]\} \supset (x)F(x)$

. . . .

. . . .

afirman, respectivamente, que hay cuando más un individuo, que hay cuando más dos individuos, que hay cuando más tres individuos, . . . Pero si queremos que nuestro sistema lógico sea aplicable a *cualquier* universo no vacío posible *sin atención* al número exacto de individuos que contiene, no existe una N_i tal que se requiera probar como teorema N_i o $\sim N_i$. Una competud de otra clase fue la mostrada para el cálculo proposicional presentado en el Cap. 7. Se probó que aquel sistema logístico era completo en el sentido de que toda *wff* que (en su interpretación normal) es una tautología de tabla de verdad puede probarse como teorema en el sistema. Esa clase de completud encaja de manera admirable en un cálculo proposicional, pero no sirve para un cálculo funcional. Un cálculo funcional de primer orden que no tuviese la *wff*

$$(\exists x)(y)F(x, y) \supset (y)(\exists x)F(x, y)$$

como uno de los teoremas susceptibles de probarse en el mismo sería tristemente insatisfactorio e incompleto, aunque la fórmula en cuestión *no* sea una tautología de tabla de verdad. La razón por la cual se considera que una lógica es insatisfactoria si en ella la expresión dada es una *wff*, pero no puede probarse, es que (en su interpretación normal) la fórmula expresa una verdad lógica —una verdad lógica siendo una proposición que es verdadera en (o de) *todo universo no vacío posible*—. La clase de completud deseada para nuestro cálculo funcional de primer orden puede expresarse vagamente diciendo que toda verdad lógica que se puede expresar en el sistema puede probarse como teorema dentro del mismo. Esta noción debe expresarse con mucha mayor precisión antes de poder usarla en cualquier prueba de completud.[7]

En vez de seguir hablando de "universos posibles" hablaremos de *modelos*, donde un modelo es cualquier colección no vacía de

[7] La discusión y prueba de compleción (o completud) es una adaptación a RS_1 de la prueba de compleción para un cálculo funcional de primer orden dada por Leon Henkin en su artículo "La Compleción del Cálculo Funcional de Primer Orden", en *The Journal of Symbolic Logic*, Vol. 14 (1949), Págs. 159-166. La simplificación que sigue de la prueba del profesor Henkin, me fue amablemente comunicada por él mismo en la primavera de 1951. La reproducimos con su autorización.

La primera prueba de compleción para un cálculo funcional de primer orden fue publicada por Kurt Gödel, en el artículo "Die Vollstandigkeit der Axiome der Logischen Funktionenkalkuls", *Monatshefte für Mathematik und Physik*, Vol. 37 (1930), Págs. 349–360.

elementos cada uno de los cuales se considera como un *individuo*. Y en vez de hablar de nuestro sistema de lógica como "aplicado" a un "universo posible" hablaremos de un modelo como constituyendo una interpretación normal de nuestro sistema formal. Este último término recibirá ahora un significado preciso. Con cada conjunto de individuos que se destine a servir como un modelo suponemos que también se nos dan las propiedades que pueden poseer los elementos individuales y las relaciones (diádicas, triádicas, etc.) que puede haber entre ellos. Ahora definimos "*interpretación de una wff S con respecto a un modelo dado*" como una asignación de significados tal que

1. A cada símbolo proposicional de S asignamos un valor de verdad, ya sea **T** o **F**.
2. A cada constante individual y cada variable con ocurrencia libre en S, asignamos un elemento del modelo.
3. A cada símbolo de predicado asignamos una propiedad o una relación diádica, triádica o n-ádica según que sea de grado (tenga supraíndice derecho) 1, 2, 3 o n.

Esta noción de interpretación de una *wff* con respecto a un modelo dado, es, sin embargo, incompleta, porque no se habla de lo que deba hacerse con los símbolos lógicos $\sim$, $\cdot$ y el símbolo cuantificador (x). Nuestra interpretación *normal* (o pensada) de una *wff* S con respecto a un modelo dado se define como una interpretación de S con respecto a ese modelo, sujeta a las condiciones:

a. Cualquier parte bien formada $\sim W$ tiene asignado el valor de verdad **T** o el valor **F** según que la parte bien formada W tenga asignado **F** o **T**.

b. Cualquier parte bien formada de la forma $X \cdot Y$ tiene asignado el valor de verdad **T** si y sólo si tanto X como Y tienen asignado **T**.

c. Cualquier parte bien formada $(x)R$ tiene asignado el valor de verdad **T** si y sólo si R tiene asignado el valor **T** independientemente de cuál sea el elemento del modelo que se asigne a todas las ocurrencias libres de x en R.

d. Cualquier parte bien formada $P^n(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ tiene asignado el valor de verdad **T** si y sólo si los elementos del modelo asignados a $x_1, x_2, \ldots, x_n$ en este orden se encuentran en la relación n-ádica asignada a P^n.

Hasta aquí hemos definido "interpretación" e "interpretación normal" solamente para una *wff* con respecto a un modelo dado. Una *interpretación de un sistema con respecto a un modelo dado* es una asignación de significados que proporciona interpretaciones para todas las *wff* del sistema, y una *interpretación normal de un sistema con respecto a un modelo dado* es una asignación de significados que proporciona interpretaciones normales para todas las *wff* del sistema.

Hay muchas interpretaciones, y aun numerosas interpretaciones normales de un sistema formal con respecto a un modelo dado. En algunas de éstas puede asignarse el valor **T** a una *wff* que en otra interpretación tiene asignado el valor de verdad **F**. No obstante, es obvio que los postulados de nuestro cálculo funcional de primer orden tendrán asignado el valor **T** en *cualquier* interpretación normal del sistema con respecto a *cualquier* modelo dado. Una interpretación normal particular de una *wff* S con respecto a un modelo dado se dirá que *satiface* S con respecto a ese modelo si por la misma S tiene asignado el valor **T**. Se dirá que una *wff* S es *susceptible de satisfacerse con respecto a un modelo dado* si hay una interpetación normal de S con respecto a ese modelo que asigna a S el valor de verdad **T**. Y una *wff* S se dirá que es *susceptible de satisfacerse* si hay cuando menos un modelo y una interpretación normal de S con respecto al mismo que asigna el valor de verdad **T** a S. Otro término que es importante introducir en este contexto es el término "válido". Una *wff* S es *válida con respecto a un modelo dado* si toda interpretación normal de S con respecto a ese modelo asigna el valor de verdad **T** a S. De las definiciones, inmediatamente se sigue que la *wff* S es *válida* con respecto a un modelo dado si y sólo si toda interpretación normal de S con respecto a ese modelo *satisface* S. Por último, definimos el término "válido" por medio de sí mismo: una *wff* S es *válida* si es válida con respecto a todo modelo. De las definiciones se sigue de inmediato que para cualquier *wff* S, o S es válida o $\sim S$ puede satisfacerse.

En la noción de un *modelo* tenemos una formulación precisa de nuestra noción informal de un universo posible, e *interpretación normal* es lo que debería entenderse por "aplicación en mente" o pensada (para un sistema). En consecuencia, la *validez* de una *wff* es una noción precisa que sirve al propósito sugerido en la frase "lógicamente verdadero". La completud que deseamos probar para nuestro cálculo funcional de primer orden RS_1 puede ahora definirse con precisión. Un cálculo funcional de primer orden es *completo* si y sólo si toda *wff* válida puede probarse como teorema en el mismo.

Así como para un cálculo proposicional, se tiene que para un cálculo funcional de primer orden de recíproca de la completud es la analiticidad. Un cálculo funcional analítico de primer orden es uno en el que todos los teoremas son válidos. Es obvio que todos los postulados de RS_1 son válidos y que todas las *wff* que de ellos se derivan mediante R 1 y R 2 son también válidas. Está claro que

RS_1 es analítico. La consistencia de RS_1 es una consecuencia de su analiticidad, tal como la consistencia de R.S. se mostró que era consecuencia de la analiticidad de R.S., en el Cap. 7.

Para establecer la completud de RS_1 será suficiente limitar nuestra atención a las *wff* que no contienen variables individuales libres, pues con facilidad se demuestra que a cada *wff* S que contiene variables individuales libres corresponde una *wff* S^c (llamada la *cerradura* de S) que no contiene variables individuales libres, tal que $\vdash S$ si y sólo si $\vdash S^c$ y tal que S es válida si y sólo si S^c es válida. Si S contiene exactamente n variables libres $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n$ digamos (en orden de aparición) entonces S^c será $(x_1)(x_2) \ldots (x_{n-1})(x_n)S$. Ahora, si $\vdash S$, entonces $\vdash (x_n)S$ por R 2 y otra aplicación de R 2 da $\vdash (x_{n-1})(x_n)S$; por último tenemos $\vdash S^c$ por n aplicaciones de R 2. Recíprocamente si $\vdash S^c$, es decir, $\vdash (x_1)(x_2) \ldots (x_{n-1})(x_n)S$, entonces aplicándole R 1 y la instancia de P 5 que es $(x_1)(x_2) \ldots (x_{n-1})(x_n)S \supset (x_2) \ldots (x_{n-1})(x_n)S$ dará $\vdash (x_2) \ldots (x_{n-1})(x_n)S$; así que por n aplicaciones de R 1 y P 5 obtenemos $\vdash S$. Si S es válida, toda interpretación normal de S con respecto a cualquier modelo asigna a S el valor de verdad **T** sin importar cuáles sean los elementos del modelo que sus variables individuales libres $x_1, x_2, \ldots x_n$ denoten. De aquí se sigue que $(x_n)S$ es válida y $(x_{n-1})(x_n)S$ es válida, ..., y finalmente que S^c es válida. Por otra parte, si S^c es válida, $(x_2)(x_3) \ldots (x_n)S$ tiene asignado el valor **T** sin importar cuál sea el elemento del modelo que denote x_1, de lo que se infiere que $(x_3) \ldots (x_n)S$ tiene asignado el valor **T** sin atención a cuáles elementos sean los denotados por x_1 y x_2, de donde se sigue ... finalmente que S tiene asignado el valor **T** sin importar cuáles sean los elementos del modelo que las variables individuales libres $x_1, x_2, \ldots, x_n$ denoten, lo que quiere decir que S es válida. Luego, sin perder generalidad en realidad, podemos confinar nuestra atención a la *wff* cerradas (*wff* que no contienen variables libres), a las que se hará referencia escribiendo *cwff*.

Para probar que nuestro sistema es completo es útil introducir la noción de un *conjunto*** de *cwff*. Usaremos las mayúsculas griegas *Gamma* y *Lambda*, con y sin subíndices, para denotar *conjuntos* de *cwff* de RS_1. También usaremos las llaves para representar conjuntos de *cwff*: así por ejemplo, el conjunto cuyo único elemento es la *cwff* S se escribirá $\{S\}$, el conjunto cuyos únicos dos miembros son las *cwff* S_1 y S_2 se escribirá $\{S_1, S_2\}$ y así sucesivamente. Para afirmar que hay una demostración de la *wff* Q partiendo de las premisas bien formadas cerradas $P_1, P_2, \ldots, P_n$ podemos escribir

** En el sentido de *colección*. Anteriormente hemos usado *conjuntos* en vez de *enunciados conjuntos*. (N. del T.)

$$P_1, P_2, \ldots, P_n \vdash Q$$

o

$$\{P_1, P_2, \ldots, P_n\} \vdash Q$$

Si Γ es un conjunto de *cwff* y S es una *cwff* que no pertenece a Γ, entonces el nuevo conjunto que contiene todos los miembros de Γ y S se escribirá $\{\Gamma, S\}$. Para afirmar que existe una demostración de Q partiendo de las premisas que pertenecen a $\{\Gamma, S\}$ podemos escribir

$$\{\Gamma, S\} \vdash Q \quad \text{o} \quad \Gamma, S \vdash Q$$

Hay un enunciado alternativo del Teorema de Deducción que hace uso de esta nueva notación:

$$Si\ \Gamma, P \vdash Q \quad \text{entonces} \quad \Gamma \vdash P \supset Q$$

Si hay una demostración de la *wff* Q partiendo de las premisas P_1, $P_2, \ldots, P_n$, entonces existe, desde luego, una demostración de Q partiendo de cualquier conjunto de *cwff* Γ que contenga $\{P_1, P_2, \ldots, P_n\}$ como subconjunto (lo cual se escribirá $\{P_1, P_2, \ldots, P_n\} \subset \Gamma$ no importando qué otras *wff* Γ contenga. El conjunto Γ puede ser, inclusive, infinito: no hay nada en nuestra prueba del Teorema de Deducción que requiera revisión para dar cabida a esta posibilidad. Claro que en cualquier demostración de Q a partir de un conjunto infinito de premisas sólo un número finito de las mismas se *usará* de hecho, pues una demostración es una sucesión *finita* de fórmulas bien formadas.

Hemos dicho que, por definición, un cálculo funcional de primer orden es *completo* si y sólo si toda *wff* válida se puede probar en el mismo como teorema, y entonces mostramos que el cálculo funcional de primer orden RS_1 es completo si y sólo si toda fórmula bien formada cerrada puede probarse en RS_1 como teorema de RS_1. Decir que toda *cwff* válida es susceptible de probarse como un teorema de RS_1 es, por transposición, decir que para cualquier *cwff* S, si S *no* es un teorema, entonces S *no* es válida.

Al definir los términos "válido" y "puede satisfacerse" observamos que para cualquier *wff* S, o S es válida o $\sim S$ puede satisfacerse. Por tanto, decir que S no es válida, es decir, que $\sim S$ puede satisfacerse. Y luego podemos decir que RS_1 es completo si y sólo si para cualquier *cwff* S, si S no es un teorema entonces $\sim S$ puede satisfacerse. Podemos establecer este resultado introduciendo una característica φ tal que se cumplan las dos condiciones siguientes:

1) Si S es una *cwff* que no es un teorema, entonces S tiene la característica φ; y

2) Si S es una *cwff* que tiene la característica φ, entonces $\sim S$ puede satisfacerse;

puesto que de 1) y 2) se seguirá la completud de RS_1 por medio de un Silogismo Hipotético.

Primero definimos dos atributos de los *conjuntos de cwff*. Un conjunto Λ de *fórmulas bien formadas cerradas* es *inconsistente* si $\Lambda \vdash \sim P{\cdot}P$, de otro modo Λ es *consistente*. Es obvio que *cualquier wff* puede inferirse de un conjunto inconsistente, pues si S es cualquier *wff*, $\sim P{\cdot}P \vdash (\sim P{\cdot}P) \vee S$ por Ⓟ que es lógicamente equivalente a $\sim P{\cdot}P \vdash \sim(\sim P{\cdot}P) \supset S$. Dado que $\vdash \sim(\sim P{\cdot}P)$ por Ⓟ tenemos por R 1 que $\sim P{\cdot}P \vdash S$. Luego $\Lambda \vdash S$ donde Λ es cualquier conjunto inconsistente de *cwff* y S es una fórmula bien formada cualquiera. Ahora, la característica φ antes aludida se puede definir como: una *cwff* S tiene la característica φ si y sólo si $\{\sim S\}$ es un conjunto consistente.

Y demostramos el inciso 1) anterior como el lema siguiente:

LEMA: Si S es una *cwff* que no es un teorema, entonces $\{\sim S\}$ es un conjunto consistente.

Prueba: Mostramos que para cualquier *cwff* S, si $\{\sim S\}$ *no* es un conjunto consistente, entonces S es un teorema. Sea S cualquier *cwff* tal que $\{\sim S\}$ no es consistente. Si $\{\sim S\}$ no es consistente, entonces es inconsistente, lo cual significa que

$$\sim S \vdash \sim P{\cdot}P$$

Por ser S una fórmula bien formada cerrada podemos usar el Teorema de Deducción para obtener

$$\vdash \sim S \supset \sim P{\cdot}P$$

de lo cual

$$\vdash \sim(\sim P{\cdot}P) \supset \sim\sim S$$

se sigue por Ⓟ. Ya se tiene

$$\vdash \sim(\sim P{\cdot}P)$$

por Ⓟ, de modo que por R 1 obtenemos

$$\vdash \sim\sim S$$

que por Ⓟ da

$$\vdash S$$

que es el resultado deseado.

En vez de demostrar el inciso 2) de antes, simplemente como

Si S es una *cwff* tal que $\{\sim S\}$ es un conjunto consistente, entonces $\sim S$ puede satisfacerse, probamos un resultado un tanto más general, para cuyo enunciado hay que definir el concepto de conjunto de fórmulas que se puede "satisfacer simultáneamente". La definición es: Un conjunto Λ de *cwff* de un sistema formal es *simultáneamente susceptible de satisfacerse* por un modelo dado si y sólo si existe una interpretación normal de todas las fórmulas de Λ con respecto a ese modelo que satisfaga todas las *wff* de Λ. Ahora enunciamos y probamos el

METATEOREMA X. *Cualquier conjunto consistente de cwff, de RS_1 puede satisfacerse simultáneamente.*

Prueba: Nuestra prueba de la satisfactibilidad simultánea de un conjunto consistente arbitrario Λ, de *cwff* de RS_1 se lleva a cabo construyendo un conjunto de *cwff* más grande que incluya Λ como subconjunto, probando entonces que este conjunto más amplio puede satisfacerse simultáneamente. Esto, desde luego, dejará establecido el resultado que se desea para Λ.

Empezamos considerando un conjunto de símbolos distintos u_1, u_2, u_3, . . . que sean diferentes de todos los que contiene RS_1. Se denota con "RS_1*" el sistema formal obtenido de RS_1 agregándole los símbolos u_1, u_2, u_3, . . . que sirven como constantes individuales. La única diferencia entre RS_1 y RS_1* es que este último tiene un mayor número de símbolos primitivos: sus reglas de formación de fórmulas bien formadas, sus postulados y sus teoremas son los mismos idénticamente. Suponemos que todas las *cwff* de RS_1* han sido dispuestas en una sucesión, así que podemos referirnos a ellas como la primera, la segunda, la tercera, etc., (hay muchas maneras de hacer esto, desde luego.)

Empezando con cualquier conjunto Λ consistente de fórmulas bien formadas cerradas de RS_1, lo agrandamos agregándole una fórmula bien formada cerrada a la vez. La primera *cwff* que hay que agregar es $(\exists x)Q_1 \supset Q_1{}^*$, donde $(\exists x)Q_1$ es la primera *cwff* de RS_1* que comienza con un cuantificador existencial y $Q_1{}^*$ es el resultado de reemplazar todas las ocurrencias libres de x en Q_1 por u_{i_1}, donde u_{i_1} es la primera u_i que no ocurre en Q_1. Al conjunto resultante podemos llamarle "Λ_1" donde $\Lambda_1 = \text{df } \{\Lambda, (\exists x)Q_1 \supset Q_1{}^*\}$ y fácilmente podemos probar que es consistente. Pues si Λ_1 fuese inconsistente, deberíamos tener $\Lambda, (\exists x)Q_1 \supset Q_1{}^* \vdash {\sim}P \cdot P$ y por el Teorema de Deducción, $\Lambda \vdash [(\exists x)Q_1 \supset Q_1{}^*] \supset {\sim}P \cdot P$. Dado que Λ no contiene ocurrencias de u_{i_1}, ni variables individuales libres, en la derivación de $[(\exists x)Q_1 \supset Q_1{}^*] \supset {\sim}P \cdot P$ a partir de Λ podríamos reemplazar todas las ocurrencias de u_{i_1} por la variable individual libre x para obtener $\Lambda \vdash [(\exists x)Q_1 \supset Q_1] \supset {\sim}P \cdot P$. De ahí podríamos sucesivamente obtener

$\Lambda \vdash (x)\{[(\exists x)Q_1 \supset Q_1] \supset \sim P \cdot P\}$ por R 2
$\Lambda \vdash (\exists x)[(\exists x)Q_1 \supset Q_1] \supset \sim P \cdot P$ por Th. 21 y R.R.
$\Lambda \vdash [(\exists x)Q_1 \supset (\exists x)Q_1] \supset \sim P \cdot P$ por Th. 19 y R.R.
$\Lambda \vdash [(\exists x)Q_1 \supset (\exists x)Q_1]$ por Ⓟ

y finalmente $\Lambda \vdash \sim P \cdot P$

que contradice el supuesto de la consistencia de Λ. Luego, Λ_1 es un conjunto consistente.

La siguiente *cwff* que se agrega es $(\exists x)Q_2 \supset Q_2{}^*$, donde $(\exists x)$ Q_2 es la segunda *cwff* de $RS_1{}^*$ que comienza con un cuantificador existencial y $Q_2{}^*$ es el resultado de reemplazar todas las ocurrencias libres de x en Q_2 por u_{i_2}, donde u_{i_2} es la primera u_i sin ocurrencia en Q_2 ni en Λ_1. Ahora definimos Λ_2 como $\{\Lambda_1, (\exists x)Q_2 \supset Q_2{}^*\}$ y se puede probar que es consistente exactamente como se hizo para Λ_1. Continuamos agregando *cwff* una a la vez: a Λ_{j-1} agregamos $(\exists x)Q_j \supset Q_j{}^*$ donde $(\exists x)Q_j$ es la *j*-ésima *cwff* de $RS_1{}^*$ que comienza con un cuantificador existencial y $Q_j{}^*$ es el resultado de reemplazar todas las ocurrencias libres de x en Q_j por u_{ij}, donde u_{i_j} es la primera u_i que no ocurre ni en Q_j ni en Λ_{j-1}. Cada Λ_j es consistente, cada uno de ellos contiene Λ como subconjunto y cada conjunto está contenido en todos los conjuntos siguientes de la sucesión.

A continuación definimos el conjunto Λ_ω como la suma o unión de todos los conjuntos de la sucesión precedente. Cualquier *cwff* de $RS_1{}^*$ es un miembro de Λ_ω siempre que sea un miembro de cualquiera de los conjuntos Λ_i de la sucesión. Es claro que $\Lambda \subset \Lambda_\omega$ y fácilmente se prueba que Λ_ω es consistente. Pues si Λ_ω fuese inconsistente habría una demostración de $\sim P \cdot P$ partiendo de un número finito de fórmulas de Λ_ω. Cada una de éstas debería aparecer en Λ o algún Λ_i por primera vez y en todo Λ_j subsecuente, pues Λ_ω no contiene fórmulas que no ocurran ya en Λ o en Λ_1 o en Λ_2 o en Λ_3 o . . . , y se ha observado que $\Lambda \subset \Lambda_1 \subset \Lambda_2 \subset \Lambda_3 \subset \ldots$. Como en cualquier demostración sólo se usa un número finito de premisas deberá haber un primer conjunto que contenga todas las premisas en la que se pretende que es una prueba de $\Lambda_\omega \vdash \sim P \cdot P$. Pero esa prueba, entonces, sería también una prueba de que $\Lambda_i \vdash \sim P \cdot P$, en contra del hecho de que cada Λ_i es consistente. Por tanto, Λ_ω es consistente.

Ahora procedemos a ampliar Λ_ω hasta obtener un conjunto consistente *máximo* Γ de *cwff* de $RS_1{}^*$. Nuestro método para "agrandar" el conjunto Λ_ω consiste en agregarle sucesivamente cada *cwff* de $RS_1{}^*$ que sea consistente con las fórmulas de Λ_ω junto con las ya agregadas. El conjunto Γ que resulta será consistente, pues cualquier demostración de que $\Gamma \vdash \sim P \cdot P$ haría uso de sólo un número finito de fórmulas de Γ, la última de las cuales (en el orden en que se les agrega) *no* podría haber sido agregada si se hubiesen seguido las instrucciones para agregar fórmulas. De nuestra definición de Γ se sigue para cualquier *cwff* de $RS_1{}^*$ que no esté en Γ, que el agregarla a Γ daría lugar a un conjunto inconsistente; así que a Γ le llamamos un conjunto consistente *maximal.*

Es obvio que Γ contiene todos los postulados cerrados de $RS_1{}^*$ y las cerraduras de todos los que no son cerrados y también todos los teoremas cerrados de $RS_1{}^*$, ya que si S es un *cwff* tal que $\Gamma \vdash S$, entonces S está contenida en Γ. Puesto que al ser maximal el conjunto Γ, el agregarle cualquier *cwff* S que no pertenece al mismo da lugar a un conjunto inconsistente, es decir, que para cualquier *cwff* S que no pertenezca Γ, se tiene $\Gamma\, S \vdash {\sim}P{\cdot}P$. De aquí, por el Teorema de Deducción, tenemos $\Gamma \vdash S \supset {\sim}P{\cdot}P$. Ahora bien, si también tuviésemos $\Gamma \vdash S$, entonces, por R 1 debiéramos tener $\Gamma \vdash {\sim}P{\cdot}P$ en contra del hecho de que Γ es consistente. También habría que observar que si S es una *cwff* de $RS_1{}^*$ se tiene $\Gamma \vdash S$ o $\Gamma \vdash {\sim}S$. Esto se sigue del hecho de que cada *cwff* S de $RS_1{}^*$ está contenida en Γ, o no lo está. Si S está en Γ, entonces obviamente $\Gamma \vdash S$. Mientras que si S no está en Γ, entonces Γ, $S \vdash {\sim}P{\cdot}P$ y por el Teorema de Deducción $\Gamma \vdash S \supset {\sim}P{\cdot}P$. De aquí que por Ⓟ se tenga $\Gamma \vdash {\sim}({\sim}P{\cdot}P) \supset {\sim}S$ y como también se tiene por Ⓟ que $\Gamma \vdash {\sim}({\sim}P{\cdot}P)$, por R 1 tenemos $\Gamma \vdash {\sim}S$. De las observaciones que preceden se sigue que para cualquier *cwff* S, o S pertenece a Γ o ${\sim}S$ pertenece a Γ.

Para mostrar que las fórmulas de Γ y, por tanto, ciertamente también las de Λ, se pueden satisfacer en forma simultánea, tomamos como nuestro modelo el conjunto I de todas las constantes individuales de $RS_1{}^*$ consideradas como *individuos*. Estas son todas las constantes individuales de RS_1, a, b, c, a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2, ..., junto con todos los símbolos u_1, u_2, u_3, u_4, ... Nuestra interpretación de las *cwff* de Γ consiste en las siguientes asignaciones de significados:

1. A cada símbolo proposicional de $RS_1{}^*$ asignamos el valor de verdad **T**, si pertenece a Γ; de otra manera se le asigna el valor de verdad **F**.

2. A cada constante individual de $RS_1{}^*$ (considerada como un símbolo en un sistema interpretado) le asignamos la misma (considerada como un individuo que pertenece al modelo I). No hay variables individuales libres en ninguna *wff* de Γ pues todas son *fórmulas bien formadas cerradas*; en consecuencia, no se les presta ninguna atención aquí.

3. A cada símbolo de predicado P^n asignamos la relación n-ádica (o atributo si $n = 1$) entre n individuos de I, de que tener sus nombres, propiamente encerrados entre paréntesis, adjuntados en ese orden a P^n, constituya una *cwff de* Γ.

La interpretación se completa y se hace normal agregando las condiciones

a. Cualquier *cwff* $\sim S$ tiene asignado el valor de verdad **T** o **F** según que la *cwff* S tenga asignado el valor **F** o **T**.

b. Cualquier *cwff* $X \cdot Y$ tiene asignado el valor de verdad **T** si tanto X como Y tienen asignado el valor de verdad **T**; de otro modo se le asigna el valor **F**.

c. Cualquier *cwff* $(x)R$ tiene asignado el valor **T** si se asigna el valor **T** a todo resultado de reemplazar todas las ocurrencias libres de x en R por una constante individual de RS_1^*; de otra forma se le asigna **F**.

d. Toda *cwff* $P^n(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ tiene asignado el valor de verdad **T** si los elementos del modelo que se asignan a $a_1, a_2, \ldots, a_n$ en ese orden, se encuentran en la relación n-ádica asignada a P^n; de otro modo se le asigna **F**.

Ahora podemos probar que todas las *wff* de Γ están satisfechas en esta interpretación. Lo que se va a probar es el resultado más fuerte de que toda *cwff* S de RS_1^* tiene asignado el valor de verdad **T** o **F** según que S pertenezca o no pertenezca a Γ. Nuestra prueba es por inducción fuerte sobre el número de símbolos en S contando cada símbolo proposicional, cada *cwff* de la forma $P^n(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, cada cuantificador universal (x), y cada ocurrencia de $\cdot$ y $\sim$ como un símbolo.

α) En el caso $n = 1$, S o es un símbolo proposicional o una *cwff* de la forma $P^n(a_1, a_2, \ldots, a_n)$. Si S es un símbolo proposicional, por el párrafo 1 de la asignación original de significados, S tiene asignado el valor de verdad **T** o **F** según que esté o no esté contenida en Γ. Si S es la *cwff* $P^n(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, entonces por el párrafo 3 y la condición *d*, S tiene asignado el valor de verdad **T** o **F** según que esté o no esté contenida en Γ.

β) Aquí se supone que toda *cwff* de RS_1^* que contiene menos de k símbolos tiene asignado el valor de verdad **T** o **F** según que esté o no esté contenida en Γ. Ahora consideramos cualquier *cwff* S de RS_1^* que exactamente contenga k símbolos. S debe ser o $\sim W$ o $X \cdot Y$ o $(x)R$.

CASO 1. S es $\sim W$. Si $\sim W$ está en Γ, entonces, dado que Γ es un conjunto consistente maximal, W no está en Γ. Aquí, por la hipótesis del caso β, como W contiene menos de k símbolos, W tiene asignado el valor de verdad **F**. Por la condición a, $\sim W$ debe tener asignado el valor **T**. Luego, si S está en Γ, tiene asignado el valor de verdad **T**. Si $\sim W$ no está en Γ, entonces W está en Γ. Aquí W tiene asignado **T**, de modo que $\sim W$ debe tener asignado **F**. Luego, si S no está en Γ, se le asigna el valor de verdad **F**.

Caso 2. S es $X \cdot Y$. Si $X \cdot Y$ está en Γ, entonces por Ⓟ $\Gamma \vdash X$ y $\Gamma \vdash Y$, de modo que X y Y ambas están en Γ. Dado que cada una contiene menos de k símbolos, por la hipótesis del caso β ambas tienen asignado el valor **T** y por la condición b, también lo tiene asignado S. Si $X \cdot Y$ no está en Γ entonces no ocurre que ambas, X y Y puedan estar en Γ (porque si lo estuvieran, entonces por Ⓟ $\Gamma \vdash X \cdot Y$ y $X \cdot Y$ debería estar contenida en Γ), de modo que no tienen asignado el valor **T**, las fórmulas X y Y, a la vez, y por la condición b, S tiene asignado el valor de verdad **F**.

Caso 3. S es $(x)R$. Si $(x)R$ está en Γ, entonces, si Q es resultado de la sustitución de todas las ocurrencias libres de x en R por una constante individual, $\vdash (x)R \supset Q$ por P 5, y por R 1, $\Gamma \vdash Q$. Dado que Γ es un conjunto consistente maximal, toda Q semejante está contenida en Γ y dado que cada una de ellas contiene menos de k símbolos, todas tienen asignado el valor de verdad **T** por la hipótesis del caso β y por la condición c, $(x)R$ tiene asignado también **T**. Luego, si $(x)R$ está en Γ, tiene asignado el valor **T**. Si $(x)R$ no está en Γ, entonces $\Gamma \vdash \sim(x)R$, que por el Teo. 7 y la Regla de Reemplazo es $\Gamma \vdash (\exists x)\sim R$. Dado que Γ es un conjunto consistente maximal debe contener $(\exists x)\sim R$. Pero $(\exists x)\sim R$ es una *cwff* de $RS_1{}^*$ que comienza con un cuantificador existencial y luego la fórmula $(\exists x)\sim R \supset \sim R^*$ debe haber sido agregada a algún Λ_{j-1} para formar Λ_j, donde $\sim R^*$ es el resultado de reemplazar todas las ocurrencias libres de x en $\sim R$ por u_{i_j}. Dado que la *cwff* $(\exists x)\sim R \supset R^*$ pertenece a algún Λ_j tal debe pertenecer a Γ. Luego, por R 1, $\Gamma \vdash \sim R^*$, así que $\sim R^*$ pertenece a Γ también. Como Γ es consistente, R^* *no* pertenece a Γ y como contiene menos de k símbolos, por la hipótesis del caso β se le asigna el valor de verdad **F**. Luego por la condición c, $(x)R$ tiene asignado el valor de verdad **F**.

Con esto se completa la inducción y prueba que todas las fórmules de Γ y luego todas las de Λ, se satisfacen simultáneamente. El Metateorema X con la discusión que le precedía completa nuestra prueba de

Metateorema XI. *RS_1 es completo.*

En la sección precedente mostramos que RS_1 es lógicamente equivalente a las técnicas de deducción natural desarrolladas en el Cap.

4. Así, nuestra prueba del Metateorema XI convalida lo dicho al final del Cap. 4, a saber, que las técnicas de deducción natural que allí se desarrollaron "permiten la demostración de todas las proposiciones lógicamente verdaderas construidas utilizando los conectores de función de verdad y cuantificaciones de variables individuales".

9.7. RS₁ con Identidad

Obtenemos un cálculo de primer orden con identidad agregando a RS_1 un nuevo símbolo de relación binaria la constante predicativa "I^2" y axiomas adicionales respecto al nuevo símbolo para imponerle las condiciones que sirvan para caracterizar la identidad. Nuestra expresión del metalenguaje para las *wff* que contienen el nuevo símbolo de identidad, a saber "$I^2(xy)$" será "$x = y$". Aunque es costumbre usar dos o más axiomas especiales o esquemas de axiomas para la identidad, es suficiente un solo esquema de axioma.[8] Este es

P 6. $\qquad (y)\{Fy \equiv (\exists x)[(x = y)\cdot Fx]\}$

De este nuevo postulado junto con los otros postulados, reglas, teoremas, reglas derivadas y metateoremas de RS_1 con que ya contamos, podemos deducir los siguientes resultados concernientes a la identidad.

TEOREMA I-1: $\vdash [(x = y)\cdot Fx] \supset Fy$

Prueba:

	$(x = y)\cdot Fx \vdash (y)\{Fy \equiv (\exists x)[(x = y)\cdot Fx]\}$	P 6
	$(x = y)\cdot Fx \vdash Fy \equiv (\exists x)[x = y)\cdot Fx]$	DR 7
	$(x = y)\cdot Fx \vdash (\exists x)[x = y)\cdot Fx] \supset Fy$	P
	$(x = y)\cdot Fx \vdash (x = y)\cdot Fx$	premisa
	$(x = y)\cdot Fx \vdash (\exists x)[(x = y)\cdot Fx]$	DR 8
	$(x = y)\cdot Fx \vdash Fy$	R 1
	$\vdash [(x = y)\cdot Fx] \supset Fy$	D.T.

TEOREMA I-2: $\vdash y = y$

Prueba: Empezamos con una instancia de P 6 en la cual 'Fz' es '$\sim(z = y)$':

$(y)[\sim(y = y) \equiv (\exists x)[(x = y)\cdot \sim(x = y)]]$	P 6
$\sim(y = y) \equiv (\exists x)[(x = y)\cdot \sim(x = y)]$	DR 7
$(y = y) \equiv \sim(\exists x)[(x = y)\cdot \sim(x = y)]$	P
$\sim[(x = y)\cdot \sim(x = y)]$	P
$(x)\sim[(x = y)\cdot \sim(x = y)]$	R 2
$\sim(\exists x)[(x = y)\cdot \sim(x = y)]$	Teo. 8 & R.R.
$y = y$	P

[8] La idea de usar este esquema de axioma la acredita W. V. O. Quine a Hao Wang en *Set Theory and Its Logic*, Cambridge, Mass., 1963, Pág. 13.

Los Teoremas I–1 y I–2 son los axiomas usuales para la identidad.

TEOREMA I-3: $\vdash (x)(y)[(x = y) \supset (y = x)]$

Prueba: Empezamos con una instancia del Teo. I–1 en la que 'Fz' is '$z = x$':

$[(x = y)\cdot(x = x)] \supset (y = x)$	Teo. I–1
$(x = x) \supset [(x = y) \supset (y = x)]$	Ⓟ
$x = x$	Teo. I–2
$(x = y) \supset (y = x)$	R 1
$(y)[(x = y) \supset (y = x)]$	R 2
$(x)(y)[(x = y) \supset (y = x)]$	R 2

TEOREMA I-4: $\vdash (x)(y)(z)\{[(x = y)\cdot(y = z)] \supset (x = z)\}$

Prueba: Empezamos con una instancia del Teo. I–1 en la que 'Fu' es '$\sim(u = z)$'

$[(x = y)\cdot\sim(x = z)] \supset \sim(y = z)$	Teo. I–1
$(x = y) \supset [\sim(x = z) \supset \sim(y = z)]$	Ⓟ
$(x = y) \supset [(y = z) \supset (x = z)]$	Ⓟ
$[(x = y)\cdot(y = z)] \supset (x = z)$	Ⓟ
$(z)\{[(x = y)\cdot(y = z)] \supset (x = z)\}$	R 2
$(y)(z)\{[(x = y)\cdot(y = z)] \supset (x = z)\}$	R 2
$(x)(y)(z)\{[(x = y)\cdot(y = z)] \supset (x = z)\}$	R 2

TEOREMA I-5: $\vdash (x = y) \equiv (y = x)$

Prueba:

$(x)(y)[(x = y) \supset (y = x)]$	Teo. I–3
$(y)[(x = y) \supset (y = x)]$	DR 7
$(x = y) \supset (y = x)$	DR 7
$(z)[(x = z) \supset (z = x)]$	DR 9
$(w)(z)[(w = z) \supset (z = w)]$	DR 9
$(z)[(y = z) \supset (z = y)]$	DR 7
$(y = x) \supset (x = y)$	DR 7
$[(x = y) \supset (y = x)]\cdot[(y = x) \supset (x = y)]$	Ⓟ
$(x = y) \equiv (y = x)$	df.

Los cuatro "Principios de Identidad" dados en la Sec. 5.4 pueden establecerse aquí como reglas derivadas de inferencia.

DR I-1. $x = y \vdash y = x$

Prueba:

$x = y$	premisa
$y = x$	Teo. I-5 & R.R.

DR I–2. $Fx, y = x \vdash Fy$

Prueba:	$y = x$	premisa
	$x = y$	DR I–1
	Fx	premisa
	$(x = y) \cdot Fx$	Ⓟ
	$[(x = y) \cdot Fx] \supset Fy$	Teo. I–1
	Fy	R 1

DR I–3. $Fx, \sim Fy \vdash \sim(y = x)$

Prueba:	$[(x = y) \cdot Fx] \supset Fy$	Teo. I–1
	$(x = y) \supset (Fx \supset Fy)$	Ⓟ
	Fx	premisa
	$\sim Fy$	premisa
	$\sim(Fx \supset Fy)$	Ⓟ
	$\sim(x = y)$	Ⓟ
	$\sim(y = x)$	Teo. I–5 & R.R.

Ss requiere un sistema logístico más complicado para la formalización de los principios lógicos involucrados en la valoración de argumentos que conciernen a los atributos de atributos o de relaciones, o relaciones entre atributos y relaciones o las nociones de *todos* o *algunos* atributos o relaciones. Estos sistemas logísticos por lo general se llaman *cálculos funcionales extendidos*, y si son consistentes, puede demostrarse que son incompletos.[9] Pero estas partes más avanzadas de la lógica simbólica rebasan los límites del presente libro.

---

[9] Probado por Kurt Gödel en "Über formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und verwandter Systeme". *Monatshefte für Mathematik und Physik*, Vol. 38 (1931), Págs. 173–198. Puede verse una traducción en "*From Frege to Gödel, A Source Book in Mathematical Logic*, 1879–1931 Ed. Jean Van Heijenoort, Cambridge, Mass., 1967, Págs. 596–616. Para una exposición informal de la prueba de Gödel, por Ernest Nagel y James R. Newman, puede verse *Contemporary Readings in Logical Theory*, editado por I. M. Copi y J. A. Gould, Nueva York y Londres, The Macmillan Company, 1967, Págs. 51–71.

APENDICE

A

Formas Normales y Expansiones Booleanas

En este apéndice desarrollamos un método alternativo para reconocer los argumentos válidos de función de verdad. Dada una forma de enunciado complicada, con frecuencia se puede encontrar una más simple, equivalente a ella, a la cual es posible "reducir" la forma dada por medio de operaciones algebraicas. Al tratar de la lógica de los enunciados compuestos y de las formas de enunciados desde el punto de vista algebraico, es conveniente usar una notación diferente para la negación. Aquí simbolizamos la negación de una expresión poniendo una barra horizontal arriba de la misma. En esta notación las verdades familiares de De Morgan se simbolizan como $p \cdot q \equiv (\bar{p} \vee \bar{q})$ y $\overline{p \vee q} \equiv (\bar{p} \cdot \bar{q})$. Todas las formas aquí tratadas son de función de verdad, de modo que su calidad de tautológicas, contradictorias o contingentes permanece inalterada cuando se reemplaza cualquier parte de las mismas por una expresión equivalente a la parte reemplazada. Así, $p \vee \bar{p}$ es una tautología y sigue siéndolo al reemplazar p por $\bar{\bar{p}}$, pues p y $\bar{p}$ son lógicamente equivalentes por el principio de la Doble Negación.

Dado que $p \cdot (q \cdot r)$ y $(p \cdot q) \cdot r$ son lógicamente equivalentes se les puede indiferentemente escribir como $p \cdot q \cdot r$. De modo semejante, $p \vee (q \vee r)$ y $(p \vee q) \vee r$ se pueden escribir como $p \vee q \vee r$. Las equivalencias lógicas involucradas son los principios de Asociación. El convenio de quitar los paréntesis innecesarios nos permite hacer enunciados generalizados de los Teoremas de De Morgan que son $\overline{p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdot \ldots \cdot p_n} \equiv (\bar{p}_1 \vee \bar{p}_2 \vee \bar{p}_3 \vee \ldots \vee \bar{p}_n)$ y $\overline{p_1 \vee p_2 \vee p_3 \vee \ldots \vee p_n} \equiv (\bar{p}_1 \cdot \bar{p}_2 \cdot \bar{p}_3 \cdot \ldots \cdot \bar{p}_n)$ Las dos tautologías $[p \cdot (q \vee r)] \equiv [(p \cdot q) \vee (p \cdot r)]$ y $[p \vee (q \cdot r)] \equiv [(p \vee q) \cdot (p \vee r)]$ son principios de Distribución. Los principios de Distribución generalizados se pueden expresar como

$$[p\cdot(q_1 \vee q_2 \vee \ldots \vee q_n)] \equiv [(p\cdot q_1) \vee (p\cdot q_2) \vee \ldots \vee (p\cdot q_n)]$$

y

$$[p \vee (q_1\cdot q_2\cdot \ldots \cdot q_n)] \equiv [(p \vee q_1)\cdot(p \vee q_2)\cdot \ldots \cdot(p \vee q_n)]$$

Suelen usarse las letras griegas mayúsculas pi y sigma para expresar los productos lógicos generalizados (las conjunciones) y las sumas lógicas generalizadas (las disyunciones). Definimos

$$\prod_{i=1}^{n} p_i = \mathrm{df}\,(p_1\cdot p_2\cdot \ldots \cdot p_n)$$

y

$$\sum_{i=1}^{n} p_i = \mathrm{df}\,(p_1 \vee p_2 \vee \ldots \vee p_n)$$

Dadas estas notaciones podemos expresar nuestros teoremas de De Morgan generalizados como

$$\overline{\prod_{i=1}^{n} p_i} \equiv \sum_{i=1}^{n} \overline{p_i} \quad \text{y} \quad \overline{\sum_{i=1}^{n} p_i} \equiv \prod_{i=1}^{n} \overline{p_i}$$

y los principios de Distribución generalizados como

$$p\cdot\sum_{i=1}^{n} q_i \equiv \sum_{i=1}^{n} p\cdot q_i \quad \text{y} \quad p \vee \prod_{i=1}^{n} q_i \equiv \prod_{i=1}^{n} (p \vee q_i)$$

Es conveniente tener otros cuatro principios de equivalencia lógica disponibles para los propósitos de la manipulación y la transformación algebraicas. Primero, los principios de Conmutación, expresados como

$$(p\cdot q) \equiv (q\cdot p) \quad \text{y} \quad (p \vee q) \equiv (q \vee p)$$

En segundo lugar, los principios de Tautología, los cuales, enunciados como

$$p \equiv (p \vee p) \quad \text{y} \quad p \equiv (p\cdot p)$$

nos aseguran que cualquier enunciado, dondequiera que ocurra, es reemplazable por la disyunción (conjunción) cuyos disyuntos (conjuntos) son ambos el mismo enunciado dado, y viceversa. Tercero, el principio de que cualquier enunciado p es lógicamente equivalente a la conjunción del mismo enunciado con una tautología cualquiera de la forma $q \vee \bar{q}$, esto es

$$p \equiv [p\cdot(q \vee \bar{q})]$$

Nuestro cuarto y último principio es la equivalencia lógica

$$p \equiv [p \vee (q \cdot \bar{q})]$$

que nos permite intercambiar p y $p \vee (q \cdot \bar{q})$ dondequiera que aparezca uno de ellos.

Es claro que haciendo un llamado a las equivalencias definitorias

$$(p \supset q) \equiv (\bar{p} \vee q) \quad \text{y} \quad (p \equiv q) \equiv [(p \cdot q) \vee (\bar{p} \cdot \bar{q})]$$

es siempre posible eliminar los condicionales y bicondicionales materiales en favor de, o que se les puede expresar en términos de, conjunciones, disyunciones y negaciones. Aún más, por aplicaciones reiteradas de los Teoremas de De Morgan y la Doble Negación es posible reemplazar cualquier forma por una forma lógicamente equivalente en la cual no haya signo de negación aplicado a una parte compuesta. Así

$$\overline{\bar{p} \cdot [\overline{(\bar{q} \vee r)} \cdot (s \cdot \bar{t})]}$$

usando repetidamente los principios de De Morgan y la Doble Negación se transforma como aparece a continuación:

$$\bar{\bar{p}} \vee \overline{[\overline{(\bar{q} \vee r)} \cdot (s \cdot \bar{t})]}$$

$$p \vee [\overline{\overline{(\bar{q} \vee r)}} \vee \overline{(s \cdot \bar{t})}]$$

$$p \vee [(\bar{q} \vee r) \vee (\bar{s} \vee \bar{\bar{t}})]$$

$$p \vee [(\bar{q} \vee r) \vee (\bar{s} \vee t)]$$

que por el principio de Asociación se convierte en,

$$p \vee \bar{q} \vee r \vee \bar{s} \vee t$$

en donde el símbolo de negación sólo se aplica a las variables q y s.

El principio de Distribución nos permite cambiar cualquier forma dada en una forma equivalente en la que ocurren símbolos de conjunción —en caso de haberlos— sólo entre variables o sus negaciones, o entonces en una forma equivalente diferente en la que los signos de disyunción sólo ocurren entre variables aisladas o sus negaciones. Así, la expresión

$$(1) \qquad (p \vee q) \cdot (r \vee s)$$

en la que el signo de conjunción ocurre entre disyunciones, por usos repetidos de los principios de Distribución, Conmutación, y de Asociación, se reduce a

$$(2) \qquad (p \cdot r) \vee (q \cdot r) \vee (p \cdot s) \vee (q \cdot s)$$

en la que los símbolos de conjunción conectan solamente variables aisladas. Y la expresión

(3) $$(p \cdot q) \vee (r \cdot s)$$

en la que el símbolo de disyunción ocurre entre conjunciones se reduce por aplicaciones repetidas de las otras partes de los principios de Distribución, Conmutación y Asociación a

(4) $$(p \vee r) \cdot (q \vee r) \cdot (p \vee s) \cdot (q \vee s)$$

en la que los símbolos de disyunción sólo conectan variables aisladas.

Se pueden definir dos "formas normales". Una forma sentencial está en *forma normal conjuntiva* cuando, además de las variables sentenciales no contiene más signos que los de conjunción, disyunción y negación; los signos de negación se aplican sólo a variables aisladas y ningún disyunto es una conjunción, es decir, que los símbolos de disyunción sólo aparecen entre las variables aisladas o sus negaciones. Luego, (1) y (4) de antes están en *forma normal conjuntiva*. Una forma sentencial está en *forma normal disyuntiva* cuando, además de las variables sentenciales no contiene sino símbolos de conjunción, disyunción y negación; los símbolos de negación sólo ocurren entre variables aisladas y ningún conyunto es una disyunción, esto es, los símbolos de conjunción sólo ocurren entre variables o sus negaciones. Así (2) y (3) escritas antes están en *forma normal disyuntiva*.

Examinemos la forma moderadamente complicada $(p \supset \bar{q}) \supset (p \equiv \bar{q})$ para ver qué es lo que se gana en perspicacia al reducirla a la forma normal disyuntiva. Al reemplazar los símbolos de implicación material por sus definiciones, la expresión inicial se reduce primero a

$$(\bar{p} \vee \bar{q}) \supset (p \equiv \bar{q})$$

y después a

$$\overline{(\bar{p} \vee \bar{q})} \vee (p \equiv \bar{q})$$

Reemplazando el símbolo de equivalencia material por su definición, obtenemos

$$\overline{(\bar{p} \vee \bar{q})} \vee [(p \cdot \bar{q}) \vee (\bar{p} \cdot \bar{\bar{q}})]$$

Aplicando el principio de De Morgan obtenemos

$$(\bar{\bar{p}} \cdot \bar{\bar{q}}) \vee [(p \cdot \bar{q}) \vee (\bar{p} \cdot \bar{\bar{q}})]$$

que por los principios de Doble Negación y de Asociación viene a ser

$$(p \cdot q) \vee (p \cdot \overline{q}) \vee (\overline{p} \cdot q)$$

Aunque se encuentra ya en forma normal disyuntiva, puede simplificársele aún más por medio de las siguientes transformaciones. Primero, aplicamos el principio de Tautología para reemplazar el primer disyunto por su "doble" obteniendo

$$(p \cdot q) \vee (p \cdot q) \vee (p \cdot \overline{q}) \vee (\overline{p} \cdot q)$$

Después, rearreglamos los términos por simple intercambio de los disyuntos segundo y tercero para obtener

$$(p \cdot q) \vee (p \cdot \overline{q}) \vee (p \cdot q) \vee (\overline{p} \cdot q)$$

Usando el principio de Distribución sobre el primer par de disyuntos, obtenemos

$$[p \cdot (q \vee \overline{q})] \vee (p \cdot q) \vee (\overline{p} \cdot q)$$

y usando el mismo a la vez que la Conmutación sobre los dos disyuntos de la derecha obtenemos

$$[p \cdot (q \vee \overline{q})] \vee [(p \vee \overline{p}) \cdot q]$$

Ahora por el principio de que la conjunción de cualquier enunciado p con una tautología de la forma $q \vee \overline{q}$ es lógicamente equivalente al enunciado mismo, primero se obtiene

$$p \vee [(p \vee \overline{p}) \cdot q]$$

y por último

$$p \vee q$$

que es lógicamente equivalente a, pero mucho más simple que la forma de que partimos.[1]

El término "forma normal" algunas veces se reserva para tipos más específicos de expresiones. Estos tipos más específicos también se llaman "Expansiones Booleanas" o "Formas Normales Booleanas" en honor del lógico británico George Boole (1815-1864). Una forma sentencial que contenga las variables p, q, r, ... se dice que está

[1] Claude E. Shannon hizo una aplicación de las formas normales a los circuitos eléctricos (representando la conexión en paralelo por "v" y la conexión en serie por "."), "A Symbolic Analysis of Relay and Switching Circuits", *Transactions of The American Institute of Electrical Engineers*, Vol. 57 (1938). Págs. 713-723.

En el artículo de John E. Pfeiffer "Symbolic Logic", en *Scientific American*, Vol. 183, No. 6 (diciembre de 1950) se puede encontrar una exposición informal de ésta y muchas otras aplicaciones interesantes. Véase también "Logic Machines" por Martin Gardner, *Scientific American*, Vol. 186, No. 3 (marzo de 1952).

en *forma normal booleana disyuntiva,* o que *es una Expansión Booleana Disyuntiva* siempre que esté en forma normal disyuntiva, o que cada disyunto tenga exactamente una ocurrencia de cada variable (o la variable o su negación), las variables aparezcan en orden alfabético en cada disyunto y no haya dos disyuntos iguales. La Expansión Booleana disyuntiva de $p \vee q$ se forma al reemplazar, primero, la variable p por $p \cdot (q \vee \bar{q})$ y q por $(p \vee \bar{p}) \cdot q$ para obtener la expresión equivalente $p \cdot (q \vee \bar{q}) \vee (p \vee \bar{p}) \cdot q$, y después usando las reglas de Distribución y Asociación para obtener $(p \cdot q) \vee (p \cdot \bar{q}) \vee (p \cdot q) \vee (\bar{p} \cdot q)$, y, finalmente, cancelando las repeticiones del mismo conjunto para obtener por la reglas de Conmutación y Tautología, lo que da $(p \cdot q) \vee (p \cdot \bar{q}) \vee (\bar{p} \cdot q)$. La Expansión Booleana disyuntiva de cualquier forma sentencial contradictoria puede obtenerse por el mismo método general.

Una forma sentencial que contega las variables $p, q, r, \ldots$ se dice que está en *forma normal booleana conyuntiva* o que es una *Expansión Booleana conyuntiva,* a condición de que esté en forma normal conjuntiva, cada conjunto contenga exactamente una ocurrencia de cada variable (ya sea la variable, ya sea su negación), las variables ocurran en orden alfabético en cada conjunto y no haya dos conjuntos iguales. La Expansión Booleana conjuntiva de $p \cdot q$ se forma al reemplazar, primero, p por $p \vee (q \cdot \bar{q})$ y q por $(p \cdot p) \vee q$ para obtener $[p \vee (q \cdot \bar{q})] \cdot [(p \cdot \bar{p}) \vee q]$, luego usando las reglas de Distribución y de Asociación para obtener $(p \vee q) \cdot (p \vee \bar{q}) \cdot (p \vee q) \cdot (\bar{p} \vee q)$, y por último cancelando las repeticiones del mismo conjunto por las reglas de Conmutación y Tautología lo que da como resultado $(p \vee q) \cdot (p \vee \bar{q}) \cdot (\bar{p} \vee q)$. La Expansión Booleana conjuntiva de cualquier forma sentencial no tautológica se obtiene con facilidad por el mismo método general y puede usarse para decidir si la forma original es contradictoria.

Cualquier Expansión Booleana conjuntiva que contenga n variables y 2^n conjuntos es reducible a una contradicción explícita. Así, la Expansión Booleana conjuntiva $(p \vee q) \cdot (p \vee \bar{q}) \cdot (\bar{p} \vee q) \cdot (\bar{p} \vee \bar{q})$ es equivalente, por la regla de Distribución, a $[p \vee (q \cdot \bar{q})] \cdot [\bar{p} \vee (q \cdot \bar{q})]$, que es equivalente a la contradicción explícita $p \cdot p$. Es igualmente obvio que la Expansión Booleana conjuntiva de cualquier contradicción contendrá 2^n conjuntos si involucra n variables. Luego, la regla general es que cualquier forma sentencial que contenga n variables es contradictoria si y sólo si tiene una Expansión Booleana conjuntiva que contiene 2^n enunciados conjuntos.

La negación de una Expansión Booleana conjuntiva puede reducirse, mediante aplicaciones reiteradas del Teorema de De Morgan y la Doble Negación a una Expansión Booleana disyuntiva lógicamente equivalente que contiene las mismas variables, y el número de sus disyuntos es igual al número de conjuntos de la Expansión Booleana conjuntiva original. Luego la Expansión Booleana conjuntiva $(p \vee q \vee r)\cdot(p \vee q \vee \bar{r})\cdot(\bar{p} \vee \bar{q} \vee r)$ tiene como negación $\overline{(p \vee q \vee r)\cdot(p \vee q \vee \bar{r})\cdot(\bar{p} \vee \bar{q} \vee r)}$ que es lógicamente equivalente a la Expansión Booleana disyuntiva $(\bar{p}\cdot\bar{q}\cdot\bar{r}) \vee (\bar{p}\cdot\bar{q}\cdot r) \vee (p\cdot q\cdot\bar{r})$. Dado que la negación de una contradicción es una tautología y una Expansión Booleana conjuntiva que contiene n variables es una contradicción si y sólo si contiene 2^n conjuntos, se sigue que una Expansión Booleana disyuntiva que contiene n variables es una tautología si y sólo si contiene 2^n disyuntos.

El hecho de que una Expansión Booleana disyuntiva tal debe ser tautológica puede verse, tal vez más claramente, gracias a las siguientes consideraciones. En primer lugar, como sólo nos conciernen los enunciados compuestos función de verdad, hablar de sustituir enunciados por las variables sentenciales de una forma es equivalente a hablar de una asignación de valores de verdad a las variables de esa forma. Ahora, así como cada renglón de una tabla de verdad con n columnas iniciales o guía representa una asignación diferente de valores de verdad, a las n variables sentenciales involucradas, así también cada uno de los disyuntos de una Expansión Booleana representa una asignación diferente de valores de verdad a las variables que contienen. Y así como 2^n renglones de una tabla de verdad con n columnas iniciales o columnas guía representan todas las asignaciones posibles de valores de verdad a sus variables, así los 2^n disyuntos de una Expansión Booleana disyuntiva representan todas las asignaciones posibles de valores de verdad a sus variables. Dado que los 2^n disyuntos representan todas las asignaciones posibles de valores de verdad a sus variables, al menos uno de ellos debe ser verdadero. Y como sólo afirma que uno de los disyuntos es verdadero, cualquier Expansión Booleana disyuntiva que contiene n variables y 2^n disyuntos es tautológica. Esto se aclara de manera un tanto diferente en la Sec. 7.6 y de nuevo en la Sec. 8.2.

Se indicó en el Cap. 2 que un argumento de función de verdad es válido si y sólo si su enunciado condicional correspondiente (cuyo antecedente es la conjunción de las premisas del argumento y cuyo consecuente es la conclusión del argumento), es una tautología. Como el contar el número de disyuntos de su Expansión Booleana disyuntiva nos permite decidir si una forma dada es o no es una tautología, esto nos proporciona un método alternativo para decidir la validez de los argumentos. Así, la forma de argumento $p \vee q,\ \sim p \mathrel{.\,\because.} q$ se prueba que es válida construyendo la Expansión Booleana disyuntiva de su correspondiente condicional $[(p \vee q) \cdot \overline{p}] \supset q$ y observando que el número de sus disyuntos es 2^2.

Como la negación de una tautología es una contradicción, un argumento es válido si y sólo si la negación de su correspondiente condicional es una contradicción. Luego, otro método para decidir la validez de un argumento es formar la Expansión Booleana conjuntiva de la negación de su correspondiente condicional y contar el número de sus conjuntos. Si contiene n variables distintas y tiene 2^n conjuntos, entonces el argumento es válido; de otra manera, es inválido.

EJERCICIOS

Para cada una de las siguientes, encontrar una equivalente tan simple como sea posible:

1. $p \vee (q \cdot \overline{p})$

***2.** $p \vee (p \cdot q)$

3. $q \cdot (p \vee \overline{q})$

4. $p \cdot (p \vee q)$

5. $(p \vee q) \cdot (q \vee r) \cdot (p \vee r) \cdot r$

***6.** $(p \cdot q) \vee (q \cdot r) \vee (p \cdot r) \vee r$

7. $p \cdot \{p \supset [q \cdot (q \supset r)]\}$

8. $p \vee \{\overline{p} \supset [q \vee (\overline{q} \supset r)]\}$

9. $(p \vee q) \supset [(p \supset q) \supset \overline{(q \vee \overline{q})}]$

***10.** $(p \cdot \overline{q}) \supset [(p \supset q) \supset \overline{(p \cdot \overline{q})}]$

11. $\{p \cdot [(q \cdot r) \vee \overline{p}]\} \vee \{(p \cdot q) \cdot [r \supset (\overline{p} \cdot \overline{r})]\} \vee \{p \cdot [\overline{p} \supset (\overline{p} \cdot q \cdot \overline{r})]\}$

12. $(p \cdot q) \vee (\overline{p} \cdot \overline{q} \cdot r) \vee (\overline{p} \cdot q) \vee (p \cdot \overline{q} \cdot r) \vee (p \cdot \overline{q}) \vee (p \cdot q \cdot r) \vee (\overline{p} \cdot q \cdot r)$

APENDICE

B

El Algebra de Clases

Los cuatro tipos tradicionales de proposiciones sujeto-predicado que se discutieron en la Sec. 4.1 pueden entenderse con respecto a clases. En esta interpretación, tales proposiciones categóricas (como tradicionalmente se las ha llamado) se entienden como afirmaciones de que una clase está incluida en otra, en forma total o parcial. Así, la proposición *A* "Todos los humanos son mortales" se toma como afirmación de que toda la clase de los humanos está contenida en la clase de los seres mortales, y la proposición *I* "Algunos humanos son mortales" afirma que *una parte* de la clase de los humanos está incluida en la clase de los mortales. Sus negaciones respectivas, las proposiciones de tipos *O* y *E*, simplemente niegan estas inclusiones.

En la interpretación en clases de las proposiciones categóricas, tanto el término sujeto como el término predicado designan clases, donde una clase es cualquier colección de objetos distintos. Al tratar de las clases, permitimos una que no contiene miembros, en absoluto, y que después discutiremos. En este apéndice se usarán las minúsculas del alfabeto griego para designar las clases. Dadas las clases α, β, γ, ... es posible, en términos de ellas, definir otras clases. Así, podemos definir la clase de todos los objetos que pertenecen a α o a β; esta clase formada al *reunir* α y β es llamada la *suma* o *unión* de α y β, y se le simboliza como "$\alpha \cup \beta$". Y podemos definir la clase de todos los objetos que pertenecen a *ambas* clases α y β; esta clase formada por la *multiplicación* de α y β es llamada el *producto o intersección* de α y β, y a veces se le simboliza como "$\alpha \cap \beta$", a menudo simplemente como "$\alpha\beta$". Dada cualquier clase α, podemos definir el *complemento* de α simbolizado como "α", como la clase de todos los objetos que *no* pertenecen a α.

Muchos enunciados respecto a las clases pueden formularse usando el signo ordinario de igualdad: "$\alpha = \beta$" afirma que todos los miembros de α, si tiene, son también elementos de β, y todos los miembros de β, si tiene elementos, también pertenecen a α. Muchas de las propiedades de la suma, el producto y el complemento de clases pueden expresarse por medio de ecuaciones. Es claro, por ejemplo, que las operaciones de formar la suma y el producto de dos clases son conmutativas: simbólicamente, tenemos

$$(\alpha \cup \beta) = (\beta \cup \alpha) \quad \text{y} \quad \alpha\beta = \beta\alpha$$

Son asociativas también:

$$(\alpha \cup \beta) \cup \gamma = \alpha \cup (\beta \cup \gamma) \quad \text{y} \quad (\alpha\beta)\gamma = \alpha(\beta\gamma)$$

También valen dos principios de distribución para suma y producto de clases. Cualquier objeto que pertenece a α o a ambos β y γ debe pertenecer a α o a β y también debe pertenecer a α o a γ, y recíprocamente. En otras palabras, para las clases, la adición es distributiva con respecto a la multiplicación, lo que podemos escribir simbólicamente como

$$\alpha \cup (\beta\gamma) = (\alpha \cup \beta)(\alpha \cup \gamma)$$

Además, cualquier objeto que pertenezca a α y a β o γ, debe pertenecer tanto a α y β simultáneamente como a α y γ. Para las clases, entonces, la multiplicación es distributiva respecto a la adición, lo que simbólicamente expresamos como

$$\alpha(\beta \cup \gamma) = \alpha\beta \cup \alpha\gamma$$

Dos principios que se asemejan al principio de tautología para enunciados (véase la Pág. 336) son consecuencias inmediatas de las definiciones de suma y producto de clases:

$$\alpha = \alpha \cup \alpha \quad \text{y} \quad \alpha = \alpha\alpha$$

Otra consecuencia inmediata de aquellas definiciones es la llamada Ley de Absorción:

$$\alpha = \alpha \cup \alpha\beta$$

Volviendo ahora a la noción de complemento de una clase, dado que cualquier cosa pertenece a una clase dada si y sólo si no pertenece a la clase de todas las cosas que no pertenecen a la clase dada, el complemento del complemento de una clase, es la clase misma. Así, tenemos una especie de regla de la doble de la negación respecto a la complementación, que en símbolos se puede expresar como

$$\alpha = \bar{\bar{\alpha}}$$

Un objeto que no pertenece a la suma de dos clases no pertenece a ninguna de ellas y, por tanto, debe pertenecer a los complementos de ambas clases. Y un objeto que no pertenece al producto de dos clases debe pertenecer al complemento de alguna de las dos clases, por lo menos. Estas dos proposiciones y sus recíprocas, que también son verdaderas, pueden expresarse simbólicamente como

$$\overline{\alpha \cup \beta} = \bar{\alpha}\bar{\beta} \quad \text{y} \quad \overline{\alpha\beta} = \bar{\alpha} \cup \bar{\beta}$$

que son versiones de los teoremas de De Morgan aplicados a las clases.

Dos clases especiales son la clase *vacía*, que no tiene miembros, y la clase *universal*, a la que todos los miembros pertenecen. La clase vacía se simboliza a veces como "0" (a veces como "Λ") y la clase universal se simboliza como "1" (a veces como "V"). Queda claro que la clase vacía es el complemento de la clase universal:

$$\bar{1} = 0$$

Las dos ecuaciones siguientes son consecuencias inmediatas de las definiciones precedentes:

$$\alpha \cup \bar{\alpha} = 1 \quad \text{y} \quad \alpha\bar{\alpha} = 0$$

Otras consecuencias inmediatas son éstas:

$$\alpha \cup 0 = \alpha,\ \alpha 1 = \alpha,\ \alpha 0 = 0, \quad \text{y} \quad \alpha \cup 1 = 1$$

Fácilmente se muestra que cualquier clase puede designarse por medio de una infinidad de *expresiones de clases* diferentes. Así, la clase designada con "α" también puede designarse con "$\alpha(\beta \cup \bar{\beta})$" (dado que $\beta \cup \bar{\beta} = 1$ y $\alpha\ 1 = \alpha$) y con "$[\alpha(\beta \cup \bar{\beta})](\gamma \cup \bar{\gamma})$", etc. Por esta "Ley de Expansión" siempre podemos introducir cualquier símbolo de clase que se elija para una expresión de clase dada, de modo que las expresiones de clase original y expandida designen la misma clase.

Por el principio de distribución, la clase $\alpha(\beta \cup \bar{\beta})$ es la misma que la clase $\alpha\beta \cup \alpha\bar{\beta}$. Para mejor describir la forma de la última expresión, usemos la frase "término simple de clases" en referencia a los símbolos "α", "β", "γ", . . ., en contraste con otras expresiones de clases como las sumas y los productos. Ahora podemos describir la expresión "$\alpha\beta \cup \alpha\bar{\beta}$" como una suma de productos distintos, de modo que en cada producto sólo aparecen términos simples o sus complementos y tal que cada término simple que aparece en cualquier lugar de la expresión aparece exactamente una vez en cada producto. Cualquier expresión tal se dice que es una Expansión Booleana disyuntiva o forma normal booleana.[1] Por medio de las ecuaciones que hasta aquí se han presentado cualquier expresión de clases puede transformarse en una Expansión Booleana disyuntiva que designa la misma clase. Así $\overline{\alpha(\alpha \cup \beta)}$ es igual, por el Teorema de De Morgan, a $\overline{\alpha} \cup (\overline{\overline{\alpha} \cup \beta})$ que a su vez y de nuevo por el Teorema de De Morgan es igual a $\overline{\overline{\alpha}} \cup \overline{\alpha\beta}$ que por la doble negación es igual a $\overline{\alpha} \cup \alpha\overline{\beta}$ que por expansión es igual a $\overline{\alpha}(\beta \cup \overline{\beta}) \cup \alpha\overline{\beta}$ que por distribución es igual a la Expansión Booleana disyuntiva $\overline{\alpha}\beta \cup \overline{\alpha}\overline{\beta} \cup \alpha\overline{\beta}$. (Nuestro principio de asociación, $(\alpha \cup \beta) \cup \gamma = \alpha \cup (\beta \cup \gamma)$, nos permite quitar paréntesis y escribir simplemente cualquiera de ellas como $\alpha \cup \beta \cup \gamma$.)

Cualquier clase dividirá a la clase universal en dos subdivisiones o subclases que son mutuamente exclusivas y conjuntamente exhaustivas. Es decir, para cualquier clase α: $1 = \alpha \cup \overline{\alpha}$ y $\alpha\overline{\alpha} = 0$. Dos clases cualesquiera dividirán la clase universal en *cuatro* subclases que son exclusivas y exhaustivas. Esto es, para cualesquier clases α y β, se tiene: $1 = \alpha\beta \cup \alpha\overline{\beta} \cup \overline{\alpha}\beta \cup \overline{\alpha}\overline{\beta}$ y el producto de dos cualesquiera de estas cuatro es la clase vacía. De modo semejante, n clases cualesquiera dividirán a la clase universal en 2^n subclases que son exclusivas y exhaustivas. La expresión de clases que simboliza a una división tal de la clase universal, habrá que observarlo, es una Expansión Booleana disyuntiva. Una Expansión Booleana disyuntiva que contiene n términos de clases simples diferentes designa la clase universal si es la suma de 2^n productos distintos (donde una mera diferencia en el orden de sus términos no hace distintos a dos productos). Las Expansiones Booleanas disyuntivas nos proporcionan así un método para decidir si una expresión de clase designa la clase universal, independientemente de cuáles sean las clases que designan los términos de clase simples que contiene. Dada cualquier expresión de clase, sólo necesitamos construir su Expansión Booleana disyuntiva y contar el número de productos de los cuales es la suma.

Una Expansión Booleana *conjuntiva* es un producto de sumas distintas de términos de clases simples o sus complementos, para la cual cualquier término simple de clases que aparezca en cualquier lugar de la expresión ocurrirá exactamente una vez en cada suma. Por el Teorema de De Morgan y las otras equivalencias ya mencionadas, el complemento de cualquier Expansión Booleana disyuntiva puede transformarse en una Expansión Booleana conjuntiva que involucra los mismos términos de clase simples y que es el producto

[1] Comparar con las Expansiones Booleanas para enunciados discutidas en el Apéndice A.

de un número de sumandos igual al número de productos de los que es la suma la Expansión Booleana disyuntiva. Dado que el complemento de 1 es 0, una Expansión Booleana conjuntiva que contenga n términos de clase diferentes designa la clase vacía si es el producto de 2^n sumas distintas. Así, tenemos un método para decidir si una expresión de clases designa la clase vacía sin atención a cuáles sean las clases designadas por los términos de clases simples que contiene o si no designa la clase vacía.

Las notaciones introducidas hasta aquí permiten la simbolización de las proposiciones sujeto-predicado de tipos ***A*** y ***E***. La proposición ***E***: *Ningún* α *es* β afirma que las clases α y β no tienen miembros en común, lo que significa que su producto es vacío. La proposición de tipo ***E*** se simboliza entonces como:

$$\alpha\beta = 0$$

La proposición ***A***: *Todo* α *es* β, afirma que no hay nada que pertenezca a α pero no a β, lo que significa que el producto de α con el complemento de β es vacío. La proposición ***A*** se simboliza entonces como

$$\alpha\overline{\beta} = 0$$

Para simbolizar las proposiciones categóricas ***I*** y ***O*** debemos introducir el signo de desigualdad "$\neq$" donde "$\alpha \neq \beta$" afirma que o α contiene un objeto que no pertenece a β o β contiene un objeto que no es un miembro de α. La proposición ***I***: *Algún* α *es* β afirma que hay al menos un miembro de α que es un miembro de β, esto es, que el producto de α y β no es vacío. En símbolos, la proposición ***I*** aparece como

$$\alpha\beta \neq 0$$

La proposición ***O***: Algún α *no es* β, afirma que hay cuando menos un miembro de α que no es miembro de β, es decir, que el producto de α y $\overline{\beta}$ no es vacío. En símbolos, la proposición ***O*** se expresa como

$$\alpha\overline{\beta} \neq 0$$

Al formularlas en la notación de clases es completamente obvio que las proposiciones ***A*** y ***O*** son contradictorias como lo son las proposiciones ***E*** e ***I***.

Algunas de las "inferencias inmediatas" tradicionales que involucran proposiciones categóricas están ya contenidas en la notación del álgebra de clases. Así, cada proposición tiene la misma simbolización que su obversa, esto es, "$\alpha\overline{\beta} = 0$" simboliza tanto *Todo* α *es* β

como *Ningún* α *es un no* β. Y la conversión, donde sea válida, es una consecuencia del principio de conmutación, es decir, *Algún* α *es* β y *Algún* β *es* α se simbolizan mediante "$\alpha\beta \neq 0$" y "$\beta\alpha \neq 0$", respectivamente, que es obvio que son equivalentes porque $\alpha\beta = \beta\alpha$ por conmutación.

Cuando nos ocupamos de las "inferencias mediatas" del simbolismo categórico tradicional podemos dividir todos los silogismos categóricos en dos clases: los que sólo contienen proposiciones universales (**A** y **E**) y los que al menos contienen una proposición existencial (**I** u **O**). Con facilidad se muestra que todos los silogismos válidos de la primera clase tienen la forma

$$\alpha\bar{\beta} = 0, \beta\bar{\gamma} = 0 \therefore \alpha\bar{\gamma} = 0$$

La validez de esta forma se puede deducir dentro del álgebra de clases recurriendo a los resultados ya expuestos en este apéndice. Dado que $\bar{\gamma}0 = 0$, y $\alpha\bar{\beta} = 0$ es una premisa tenemos $\bar{\gamma}(\alpha\bar{\beta}) = 0$ que por asociación y conmutación da $(\alpha\bar{\gamma})\bar{\beta} = 0$. Ahora $\alpha 0 = 0$, y $\beta\bar{\gamma} = 0$ es una premisa, de modo que $\alpha(\beta\bar{\gamma}) = 0$ que por asociación y conmutación nos da $(\alpha\bar{\gamma})\beta = 0$. Luego $(\alpha\bar{\gamma})\beta \cup (\alpha\bar{\gamma})\bar{\beta} = 0$, que por distribución da $(\alpha\bar{\gamma})(\beta \cup \bar{\beta} = 0$. Como $\beta \cup \bar{\beta} = 1$ y $(\alpha\bar{\gamma})\ 1 = \alpha\bar{\gamma}$, tenemos $\alpha\bar{\gamma} = 0$, conclusión del silogismo.

También se puede mostrar que todos los silogismos válidos de la segunda clase tienen la forma

$$\alpha\beta \neq 0, \beta\bar{\gamma} = 0 \therefore \alpha\gamma \neq 0$$

Para establecer la validez de la forma primero observamos que dado que $\alpha 0 = 0$, si $\alpha\beta \neq 0$, entonces $\alpha \neq 0$ y $\beta \neq 0$. Como $\alpha 0 = 0$ y $\beta\bar{\gamma} = 0$ como una premisa, $\alpha(\beta\bar{\gamma}) = 0$. Por asociación tenemos $(\alpha\beta)\bar{\gamma} = 0$. Ahora $\alpha\beta = (\alpha\beta)1$ y $\gamma \cup \bar{\gamma} = 1$, luego $\alpha\beta = (\alpha\beta)(\gamma \cup \bar{\gamma})$ y por distribución $\alpha\beta = (\alpha\beta)\gamma \cup (\alpha\beta)\bar{\gamma}$. Pero $(\alpha\beta)\gamma \cup 0 = (\alpha\beta)\gamma$ y ya hemos mostrado que $(\alpha\beta)\bar{\gamma} = 0$, por tanto, $\alpha\beta = (\alpha\beta)\gamma$. Dado que $\alpha\beta \neq 0$ es una premisa, sabemos que $(\alpha\beta)\gamma \neq 0$. Por asociación y conmutación obtenemos $(\alpha\gamma)\beta \neq 0$ de donde se sigue que $\alpha\gamma \neq 0$, que es la conclusión del silogismo. Luego, el álgebra de clases es no sólo adecuada para convalidar inferencias inmediatas que involucran proposiciones categóricas, sino que es capaz de convalidar también los silogismos categóricos.

El símbolo "$\subset$" para la *inclusión de clases* suele usarse al trabajar con el álgebra de clases. La expresión "$\alpha \subset \beta$" afirma que todos los miembros (eventuales) de α, son también miembros de β, y se usa como simbolización alternativa de la proposición de tipos **A**:

Todo α *es* β. Se le puede definir en términos de los símbolos ya introducidos de varias maneras: ya sea como $\alpha\bar{\beta} = 0$ o como $\alpha\beta = \alpha$ o como $\alpha \cup \beta = \beta$ o como $\bar{\alpha} \cup \beta = 1$, que son todas equivalentes. La relación $\subset$ es reflexiva y transitiva (véanse las Págs. 162-3) y tiene la propiedad (de transposición) de que si $\alpha \subset \beta$ entonces $\bar{\beta} \subset \bar{\alpha}$. La última es una consecuencia inmediata de la doble negación y la conmutación cuando "$\alpha \subset \beta$" se reescribe como "$\alpha\bar{\beta} = 0$" y "$\bar{\beta} \subset \bar{\alpha}$" se reescribe como "$\bar{\beta}\bar{\bar{\alpha}} = 0$". Su reflexividad es obvia cuando reescribiendo "$\alpha \subset \alpha$" como "$\alpha\bar{\alpha} = 0$" su transitividad ya se ha establecido en nuestra prueba algebraica de la validez para los silogismos categóricos que contienen sólo proposiciones universales.

El álgebra de clases puede presentarse como un sistema deductivo formal. Un sistema tal es llamado Algebra Booleana y se ha propuesto un gran número de conjuntos de axiomas alternativos de postulados para el Algebra Booleana. Uno de estos conjuntos de postulados se puede presentar como se muestra a continuación.

Los símbolos primitivos indefinidos especiales:

$$\mathbf{C},\ \cap,\ \cup,\ -,\ \alpha,\ \beta,\ \gamma, \ldots$$

Los axiomas:

Axioma 1. Si α y β están en **C** entonces $\alpha \cup \beta$ está en **C**.
Axioma 2. Si α y β están en **C** entonces $\alpha \cap \beta$ está en **C**.
Axioma 3. Hay una entidad 0, en **C**, tal que $\alpha \cup 0 = \alpha$ para cualquier α en **C**.
Axioma 4. Hay una entidad 1, en **C** tal que $\alpha \cap 1 = \alpha$ para cualquier α en **C**.
Axioma 5. Si α y β están en **C** entonces $\alpha \cup \beta = \beta \cup \alpha$.
Axioma 6. Si α y β están en **C** entonces $\alpha \cap \beta = B \cap \alpha$.
Axioma 7. Si α, β, γ están en **C** entonces $\alpha \cup (\beta \cap \gamma) = (\alpha \cup \beta) \cap (\alpha \cup \gamma)$.
Axioma 8. Si α, β, γ están en **C** entonces $\alpha \cap (\beta \cup \gamma) = (\alpha \cap \beta) \cup (\alpha \cap \gamma)$.
Axioma 9. Si las entidades 0 y 1 que satisfacen los axiomas 3 y 4, son únicas, entonces para cada α en **C** hay un $-\alpha$ en **C** tal que

$$\alpha \cup -\alpha = 1 \quad \text{y} \quad \alpha \cap -\alpha = 0$$

Axioma 10. Hay un α en **C** y un β en **C** tales que $\alpha \neq \beta$.

Este sistema[2] es un sistema deductivo formal y no un sistema logístico (véase el Cap. 6). En la interpretación a que se le destina, desde

---

[2] Del artículo "Sets of Independent Postulates for the Algebra of Logic", por E. V. Huntington, *Transactions of the American Mathematical Society*, Vol. 5 (1904), Pág. 288.

luego, **C** es la colección de todas las clases, 0 y 1 son las clases vacía y universal, respectivamente, y los símbolos $\cup$, $\cap$ y $-$ representan la adición de clases, la multiplicación y la complementación, respectivamente.

El lector interesado en deducir algunos teoremas a partir de estos axiomas encontrará que los siguientes son de deducción bastante fácil:

Teorema 1. Hay cuando más una entidad 0 en **C** tal que $\alpha \cup 0 = \alpha$.
*Teorema 2. Hay cuando más una entidad 1 en **C** tal que $\alpha \cap 1 = \alpha$.
Teorema 3. $\alpha \cup \alpha = \alpha$.
Teorema 4. $\alpha \cap \alpha = \alpha$.
Teorema 5. $\alpha \cup 1 = 1$.
Teorema 6. $\alpha \cap 0 = 0$.
*Teorema 7. $0 \neq 1$.
Teorema 8. Si $\alpha = -\beta$, entonces $\beta = -\alpha$.
Teorema 9. $\alpha = - -\alpha$.
Teorema 10. Si $\alpha \cap \beta \neq 0$, entonces $\alpha \neq 0$.
Teorema 11. $\alpha = (\alpha \cap \beta) \cup (\alpha \cap -\beta)$.
*Teorema 12. $\alpha \cup (\beta \cup \gamma) = (\alpha \cup \beta) \cup \gamma$.
Teorema 13. $\alpha \cap (\beta \cap \gamma) = (\alpha \cap \beta) \cap \gamma$.
Teorema 14. $0 = -1$.
Teorema 15. $\alpha \cup (\alpha \cap \beta) = \alpha$.
Teorema 16. $\alpha \neq -\alpha$.
Teorema 17. $-(\alpha \cap \beta) = -\alpha \cup -\beta$.
Teorema 18. $-(\alpha \cup \beta) = -\alpha \cap -\beta$.
Teorema 19. Si $\alpha \cap -\beta = 0$ y $\beta \cap -\gamma = 0$, entonces $\alpha \cap -\gamma = 0$.
*Teorema 20. Si $\alpha \cap \beta \neq 0$ y $\beta \cap -\gamma = 0$, entonces $\alpha \cap \gamma \neq 0$.

Los métodos de prueba son en gran parte sustituciones de iguales por iguales. Por ejemplo, el Teorema 1 se prueba considerando cualesquier entidades 0_1 y 0_2 en **C** tales que $\alpha \cup 0_1 = \alpha$ y $\alpha \cup 0_2 = \alpha$. Como α es cualquier miembro de **C**, tenemos tanto $0_1 \cup 0_2 = 0_1$ como $0_2 \cup 0_1 = 0_2$. Dado que $0_1 \cup 0_2 = 0_2 \cup 0_1$ por el Axioma 5 obtenemos, por sustitución, primero $0_1 \cup 0_2 = 0_2$ y luego $0_1 = 0_2$, lo que establece el teorema.

Se puede deducir la totalidad del álgebra de clases en el contexto de un cálculo funcional de primer orden. A cada atributo corresponde la clase de todas las cosas que tienen ese atributo. La expresión '$\hat{x}(Fx)$' se usa por lo común para simbolizar la clase de todas las cosas que tienen el atributo F. Más generalmente, si $\Phi\mu$ es una función proposicional cualquiera que no contiene variables libres además de μ, $\hat{\mu}(\Phi\mu)$, es la clase de todas las cosas que satisfacen esa función proposicional. Los varios símbolos para clases que se usan en el álgebra de clases pueden definirse como sigue, donde α, β, γ, ... son las clases $\hat{x}(Ax)$, $\hat{x}(Bx)$, $\hat{x}(Cx)$, ...

$$\begin{aligned} \bar{\alpha} &= \text{df}\ \hat{x}(\sim Ax) \\ \alpha \cap \beta &= \text{df}\ \hat{x}(Ax \cdot Bx) \\ \alpha \cup \beta &= \text{df}\ \hat{x}(Ax \vee Bx) \\ 0 &= \text{df}\ \hat{x}(Ax \cdot \sim Ax) \\ 1 &= \text{df}\ \hat{x}(Ax \vee \sim Ax) \end{aligned}$$

La inclusión, la igualdad y la desigualdad se pueden definir como sigue:

$$\begin{aligned} \alpha \subset \beta &= \text{df}\ (x)(Ax \supset Bx) \\ \alpha = \beta &= \text{df}\ (x)(Ax \equiv Bx) \\ \alpha \neq \beta &= \text{df} \sim (x)(Ax \equiv Bx) \end{aligned}$$

Usando estas definiciones podemos expresar todas las fórmulas del Algebra Booleana en la notación de las funciones proposicionales y los cuantificadores. Cuando se hace esto, fácilmente se muestra que todos los axiomas, y luego, todos los teoremas del Algebra Booleana se convierten en teoremas susceptibles de prueba en nuestro cálculo funcional de primer orden.

Como el Algebra Booleana es un sistema deductivo formal por sí mismo, es susceptible de varias interpretaciones. Una de ellas es desde luego el álgebra de las clases. Pero podemos dar a nuestra álgebra una interpretación proposicional y no de clases. Supóngase que interpretamos "**C**" como la colección de todas las proposiciones y "α", "β", "γ", ... como símbolos de proposiciones e interpretamos "$\cap$", "$\cup$" y "—" como símbolos de la conjunción, la disyunción (débil) y la negación. Entonces, si además interpretamos el signo de igualdad como símbolo de la equivalencia material, todos los axiomas y teoremas del Algebra Booleana se convierten en proposiciones lógicamente verdaderas del cálculo proposicional. Por tanto, podemos decir que el cálculo proposicional es una Algebra Booleana.

Desde un punto de vista un tanto diferente podemos considerar una parte del álgebra de clases como una interpretación alternativa del cálculo proposicional. Todas las fórmulas del cálculo proposicional se pueden expresar en términos de "$\sim$", "$\cdot$", y "$\vee$" con "$p \supset q$" definida como "$\sim p \vee q$" y "$p \equiv q$" definida como "$p \cdot q \vee \sim p \cdot \sim q$". Podemos interpretar los símbolos proposicionales "p", "q", "r", ... como notaciones de las clases α, β, γ, ...; y donde "p" denote α, entenderemos "$\sim p$" como notación de $\bar{\alpha}$, el complemento de α. Si

"p" y "q" denotan α y β, entonces "$p \cdot q$" se entenderá que denota el producto $\alpha\beta$ y "$p \vee q$" denotará la suma $\alpha \cup \beta$.

En la interpretación bosquejada en el párrafo precedente toda tautología de tabla de verdad del cálculo proposicional designa la clase universal. Esto puede establecerse fácilmente como sigue. En el Cap. 7 se probó que todas las (y sólo las) tautologías pueden deducirse como teoremas por aplicación repetida de R 1 a los tres axiomas de R.S. Cada uno de esos axiomas designa la clase universal: el Axioma 1, "$P \supset (P \cdot P)$" que se puede expresar como "$\sim p \vee (p \cdot p)$" denota $\bar{\alpha} \cup \alpha\alpha$ o $\bar{\alpha} \cup \alpha$ que es la clase universal 1. El Axioma 2 "$(P \cdot Q) \supset P$" expresado como "$\sim(p \cdot q) \vee p$" denota $\overline{\alpha\beta} \cup \alpha$ que por el Teorema de De Morgan es $(\bar{\alpha} \cup \bar{\beta}) \cup \alpha$ que por conmutación y asociación es igual a $(\alpha \cup \bar{\alpha}) \cup \bar{\beta}$, que es $1 \cup \bar{\beta}$ e igual a 1. El Axioma 3 '$(P \supset Q) \supset [\sim(Q \cdot R) \supset \sim(R \cdot P)]$', expresado como '$\sim(\sim p \vee q) \vee [\sim\sim(q \cdot r) \vee \sim(r \cdot p)]$', denota $\overline{\bar{\alpha} \cup \beta} \cup \overline{\overline{\beta\gamma}} \cup \overline{\gamma\alpha}$, que por el Teorema de De Morgan y la doble negación es igual a $\alpha\bar{\beta} \cup \beta\gamma \cup \bar{\gamma} \cup \bar{\alpha}$. Esta última es igual, por la Ley de Expansión, a $\alpha\bar{\beta}(\gamma \cup \bar{\gamma}) \cup \beta\gamma(\alpha \cup \bar{\alpha}) \cup \bar{\gamma}(\alpha \cup \bar{\alpha})(\beta \cup \bar{\beta}) \cup \bar{\alpha}(\beta \cup \bar{\beta})(\gamma \cup \bar{\gamma})$, que por aplicaciones reiteradas de la distribución es igual a $\alpha\bar{\beta}\gamma \cup \alpha\bar{\beta}\bar{\gamma} \cup \beta\gamma\alpha \cup \beta\gamma\bar{\alpha} \cup \bar{\gamma}\alpha\beta \cup \bar{\gamma}\alpha\bar{\beta} \cup \bar{\gamma}\bar{\alpha}\beta \cup \bar{\gamma}\bar{\alpha}\bar{\beta} \cup \bar{\alpha}\beta\gamma \cup \bar{\alpha}\beta\bar{\gamma} \cup \bar{\alpha}\bar{\beta}\gamma \cup \bar{\alpha}\bar{\beta}\bar{\gamma}$. Si ahora usamos la conmutación para reordenar los términos de la última expresión y combinamos términos iguales por el principio de que $\alpha \cup \alpha = \alpha$, obtenemos $\alpha\beta\gamma \cup \alpha\beta\bar{\gamma} \cup \alpha\bar{\beta}\gamma \cup \alpha\bar{\beta}\bar{\gamma} \cup \bar{\alpha}\beta\gamma \cup \bar{\alpha}\beta\bar{\gamma} \cup \bar{\alpha}\bar{\beta}\gamma \cup \bar{\alpha}\bar{\beta}\bar{\gamma}$, una Expansión Booleana (disyuntiva) que involucra 3 términos de clases simples. Por ser la suma de 2^3 productos distintos, designa la clase universal.

A continuación mostramos que cualquier fórmula del cálculo proposicional debe designar la clase universal si "se sigue" por R 1, de dos fórmulas, cada una de las cuales designa la clase universal. R 1 nos permite pasar a Q partiendo de P y $P \supset Q$ (o $\sim P \vee Q$). Ahora, supóngase que "P" denota α y que "Q" denota β, de modo que "$\sim P \vee Q$" denota $\bar{\alpha} \cup \beta$. Bajo la hipótesis que $\alpha = 1$ y $\bar{\alpha} \cup \beta = 1$ fácilmente se demuestra que $\beta = 1$. Pues dado que $1 \cap 1 = 1$, $\alpha(\bar{\alpha} \cup \beta) = 1$. Por distribución $\alpha\bar{\alpha} \cup \alpha\beta = 1$, y como $\alpha\bar{\alpha} = 0$, se sigue que $\alpha\beta = 1$. Pero $\alpha\beta = 1$ implica *tanto* que $\alpha = 1$ *como* $\beta = 1$, y esta última es la conclusión deseada.

Luego, todo teorema que se puede probar en R.S. designa la clase universal.

A continuación deseamos probar que si Π es una expresión de clases tal que $\Pi = 1$ sea lógicamente verdadera, entonces es designada por un teorema de R.S. Sabemos que $\Pi = 1$ si y sólo si su Expansión Booleana disyuntiva Σ involucra n términos de clase simples y es la suma 2^n productos distintos. Pero cualquier Expansión Booleana disyuntiva que involucra los términos de clases simples $\alpha, \beta, \gamma \ldots$ se denotará mediante una fórmula de forma normal booleana disyuntiva (véanse las Págs. 338-340) que involucra los variables sentenciales $p, q, r, \ldots$, donde "p" denota α, "q" denota β, "r" denota γ, etc., y esta fórmula será la disyunción de un número de conjunciones igual al número de productos de los cuales es la suma la primera fórmula. Luego, si Σ es una Expansión Booleana disyuntiva en n términos de clases simples, constituida por la suma de 2^n productos, entonces se le denota por la forma normal booleana disyuntiva S que contiene n variables sentenciales y es la disyunción de 2^n conjunciones. Esta última es, por tanto, una tautología y luego puede probarse como teorema en R. S. Además, los principios del álgebra de clases por los que Π se expande en Σ, todos tienen sus análogos en las transformaciones que preservan las tautologías en el cálculo proposicional, de modo que si $\Pi = \Sigma$ y "P" denota Π y "S" denota Σ, entonces si "S" es una tautología, "P" es también una tautología y, por tanto, un teorema de R.S. (Véase la discusión de la integridad de H.A. en la Sec. 8.2.)

De esta manera se muestra que una ecuación del álgebra de clases de la forma $\Pi = 1$ es lógicamente verdadera si y sólo si la *wff* "P" que designa Π es un teorema del cálculo proposicional. Dado que cada ecuación del álgebra de clases es equivalente a una ecuación de la forma $\Pi = 1$ ($\Gamma = \Lambda$ es equivalente a $\Gamma \subset \Lambda$ y $\Lambda \subset \Gamma$ que son equivalentes a $\overline{\Gamma} \cup \Lambda = 1$ y $\overline{\Lambda} \cup \Gamma = 1$ cuya expresión combinada es $(\overline{\Gamma} \cup \Lambda)(\overline{\Lambda} \cup \Gamma) = 1$), se sigue que a cada ecuación lógicamente verdadera corresponde un teorema que tiene prueba en el cálculo proposicional.

De modo semejante, las desigualdades lógicamente verdaderas del álgebra de clases corresponden a *wff* de R.S. que *no* se pueden probar como teoremas. En primer lugar, cualquier desigualdad $\Gamma \neq \Lambda$ es equivalente a una desigualdad de la forma $\Pi \neq 1$, a saber $(\overline{\Gamma} \cup \Lambda)(\overline{\Lambda} \cup \Gamma) \neq 1$. Y si es lógicamente verdadero que $\Pi \neq 1$; entonces no es lógicamente verdadero que $\Pi = 1$, de donde se sigue que la *wff* que designa Π no se puede probar como teorema en R.S. Como tenemos un criterio efectivo para distinguir entre teoremas y no teoremas de R.S., tenemos en el mismo un criterio para reconocer las ecuaciones y desigualdades lógicamente verdaderas del álgebra de clases.

La discusión precedente debe ser suficiente para mostrar lo íntima que es la relación entre el álgebra de clases y el cálculo proposicional.

APENDICE

C

La Teoría Ramificada de los Tipos[1]

La teoría *simple* de los tipos que se expone en forma breve en las Págs. 180-181, es suficiente para eliminar las paradojas lógicas como la del pretendido atributo de *impredicable*. Pero existe otra especie de paradoja o contradicción que no se evita mediante la teoría simple de los tipos. Un ejemplo de esta otra especie de paradoja es la paradoja del mentiroso, que se discutió en la Pág. 204. Estas dos especies de paradojas fueron explícitamente distinguidas por primera vez, por F.P. Ramsey, en 1926.[2] Desde entonces las paradojas de la primera especie se conocen como "paradojas lógicas", y las de la segunda como "paradojas epistemológicas" o de manera más común como "paradojas semánticas".

Un ejemplo singularmente claro de una paradoja semántica es la que se debe a Kurt Grelling.[3] La paradoja de Grelling se puede enunciar de modo informal como sigue. Algunas palabras designan atributos ejemplificados por las palabras mismas; así, "española" es una palabra española, y "breve" es una palabra breve. Otras palabras designan atributos que las palabras mismas no ejemplifican; así, "francesa" no es una palabra francesa y "larga" no es una palabra larga. Usaremos la palabra "heterológica" para designar el atributo de las palabras de designar atributos *no* ejemplificados por las palabras mismas. De este modo, las palabras "francesa" y "larga" son

---

[1] El lector deseoso de un estudio más completo de este tema debiera consultar el Cap. 3 de *The Theory of Logical Types* por I. M. Copi, Londres, 1971, Págs. 76-114.

[2] "The Foundations of Mathematics" por F. P. Ramsey, en *Proceedings of the London Mathematical Society*, segunda serie, Vol. XXV (1926), Págs. 338-384. Reimpreso en *The Foundations of Mathematics* (Londres y Nueva York, 1931), Págs. 1-61.

[3] "Bemerkungen zu den Paradoxien von Russell und Burali-Forti" por K. Grelling y L. Nelson, en *Abhandlung der Fries'schen Schule*, nueva serie, Vol. II (1907-1908), Págs. 300-324.

ambas heterológicas. La contradicción surge entonces al preguntar si la palabra "heterológica" es heterológica. Si es heterológica, entonces designa un atributo del cual no es ejemplo, y como designa el atributo heterológico, no es heterológica. Pero si no es heterológica, entonces el atributo que designa *está* ejemplificado por la palabra misma, así que *es* heterológica. La contradicción queda así explícita: si es entonces no es, y si no es entonces es.

Una obtención un tanto más formal de la paradoja de Grelling, versión de Ramsey,[4] es la siguiente. Si la relación nombre se designa con "Des", de modo que "*s* designa ϕ" se simboliza como "sDesϕ", empezamos con la definición

$$\mathrm{Het}(s) = \mathrm{df}\,(\exists\phi){:}\mathrm{sDes}\phi\cdot\mathrm{sDes}\psi \equiv_{\psi} \psi = \phi\cdot{\sim}\phi(s)$$ [5]

CASO 1.

$$\begin{array}{lll}
(1) & \mathrm{Het}(\text{`Het'}) & \supset {:}(\exists\phi){:}\text{`Het'}\mathrm{Des}\phi\cdot\text{`Het'}\mathrm{Des}\psi \equiv_{\psi} \psi = \phi\cdot{\sim}\phi(\text{`Het'}) \\
(2) & & \supset {:}\text{`Het'}\mathrm{Des}\phi\cdot\text{`Het'}\mathrm{Des}\psi \equiv_{\psi} \psi = \phi\cdot{\sim}\phi(\text{`Het'}) \\
(3) & & \supset {:}\text{`Het'}\mathrm{Des}\phi\cdot\text{`Het'}\mathrm{DesHet} \equiv \mathrm{Het} = \phi\cdot{\sim}\phi(\text{`Het'}) \\
(4) & & \supset {:}\text{`Het'}\mathrm{DesHet} \equiv \mathrm{Het} = \phi\cdot{\sim}\phi(\text{`Het'}) \\
(5) & & \supset {:}\mathrm{Het} = \phi\cdot{\sim}\phi(\text{`Het'}) \\
(6) & & \supset {:}{\sim}\mathrm{Het}(\text{`Het'})
\end{array}$$

CASO 2.

$$\begin{array}{lll}
(1) & {\sim}\mathrm{Het}(\text{`Het'}) & \supset {:}(\phi){\sim}[\text{`Het'}\mathrm{Des}\phi\cdot\text{`Het'}\mathrm{Des}\psi \equiv_{\psi} \psi = \phi\cdot{\sim}\phi(\text{`Het'})] \\
(2) & & \supset {:}\text{`Het'}\mathrm{DesHet} \supset {\sim}[\text{`Het'}\mathrm{Des}\psi \equiv_{\psi} \\
 & & \qquad\qquad \psi = \mathrm{Het}\cdot{\sim}\mathrm{Het}(\text{`Het'})] \\
(3) & & \supset {:}\text{`Het'}\mathrm{Des}\psi \equiv_{\psi} \psi = \mathrm{Het}\cdot \supset \cdot\mathrm{Het}(\text{`Het'}) \\
(4) & & \supset {:}\text{`Het'}\mathrm{Des}\psi \equiv_{\psi} \psi = \mathrm{Het}\ (\text{suponiendo `Het' univocal}) \\
(5) & & \supset {:}\mathrm{Het}(\text{`Het'})
\end{array}$$

Por tanto

$$\mathrm{Het}(\text{`Het'}) \equiv {\sim}\mathrm{Het}(\text{`Het'})$$

que es una contradicción.

La obtención de la contradicción precedente no violó restricción alguna de la teoría simple de los tipos lógicos, así que esta teoría no puede evitar la contradicción referida. Las contradicciones de esta segunda especie pueden eliminarse, sin embargo, adoptando una versión más complicada de la teoría de los tipos lógicos que se conoce

---

[4] Obra citada, Págs. 358 y 369-372, y en la Reimp. Págs. 27 y 42-46.

[5] La escritura de psi como subíndice al símbolo de equivalencia sirve para abreviar la cuantificación universal de la equivalencia con respecto a psi, de modo que "sDes$\psi \equiv_{\psi} \psi = \phi$" es una abreviación pára "$(\psi)[\mathrm{sDes}\psi \equiv \psi = \phi]$".

como la teoría "ramificada" (o "de ramificación") de los tipos lógicos. Ahora bien, de acuerdo con la teoría simple de los tipos lógicos, todas las entidades pueden dividirse en tipos lógicos diferentes, de los cuales el más bajo contiene todos los individuos, el siguiente consiste en todos los atributos de individuos (que se designan por funciones de individuos), el siguiente consiste en todos los atributos de atributos de individuos (designados por funciones de funciones de individuos) y así sucesivamente. También hay jerarquías de relaciones entre individuos y atributos y de atributos de relaciones, pero no tenemos necesidad de considerarlas aquí. Usando letras minúsculas para designar individuos y mayúsculas para denotar atributos, podemos representar esta jerarquía como sigue, donde el supraíndice que se pone a una función indica su nivel correcto en la jerarquía:

. . . .
. . . .
. . . .

tipo 3: $F_3, G_3, H_3, \ldots$
tipo 2: $F_2, G_2, H_2, \ldots$
tipo 1: $F_1, G_1, H_1, \ldots$
tipo 0: $a, b, c, \ldots, x, y, z$

Sólo una función de tipo 1 puede predicarse significativamente de un individuo, y en general, una función de tipo i puede significativamente predicarse de una función de tipo j si y sólo si $i = j + 1$.

La jerarquía precedente presenta un "bosquejo" de la teoría simple de los tipos lógicos. Ahora bien, la teoría ramificada divide cada tipo por arriba del nivel cero en una nueva jerarquía. De este modo, todas las funciones de tipo 1, que pueden predicarse con significación de los individuos, se dividen en diferentes *órdenes* de la manera siguiente.

Todas las funciones proposicionales de tipo 1 que o no contienen cuantificadores o contienen cuantificadores sólo sobre variables individuales se dice que son funciones de *primer orden*. Por ejemplo, $F_1(x)$ y $(y)[F_1(y) \supset G_1(x)]$ son funciones de primer orden de tipo 1. Las funciones de primer orden tendrán un supraíndice izquierdo 1 para indicar su posición en la jerarquía de los órdenes. Así, todas las funciones de primer orden y tipo 1 se pueden enlistar como ${}^1F_1, {}^1G_1, {}^1H_1, \ldots$ A continuación, todas las funciones proposicionales de tipo 1 que contienen cuantificadores sobre funciones de primer orden, pero no contienen cuantificadores sobre cualesquier otras funciones son funciones de *segundo orden*. Ejemplos de funciones de segundo orden de tipo 1 son $({}^1F_1)[{}^1F_1(x) \equiv {}^1F_1(a)]$ y $(\exists{}^1G_1)$

$(\exists y)[{}^1G_1(y) \supset {}^1H_1(x)]$. Las funciones de segundo orden tendrán adjunto un supraíndice izquierdo 2, y todas las funciones de segundo orden de tipo 1 pueden enlistarse como ${}^2F_1$, ${}^2G_1$, ${}^2H_1$, ... En general, una función de orden n y tipo 1 contendrá cuantificadores sobre las funciones de orden $n - 1$, pero no contendrá cuantificadores sobre funciones de orden m con $m \geq n$.

La teoría ramificada de los tipos lógicos puede describirse en forma compendiada por medio del arreglo bidimensional siguiente:

	Orden 1	*Orden* 2	*Orden* 3	...
			⋮	
Tipo 3:	${}^1F_3, {}^1G_3, {}^1H_3, \ldots;$	${}^2F_3, {}^2G_3, {}^2H_3, \ldots;$	${}^3F_3, {}^3G_3, {}^3H_3, \ldots;$	...
Tipo 2:	${}^1F_2, {}^1G_2, {}^1H_2, \ldots;$	${}^2F_2, {}^2G_2, {}^2H_2, \ldots;$	${}^3F_2, {}^3G_2, {}^3H_2, \ldots;$	...
Tipo 1:	${}^1F_1, {}^1G_1, {}^1H_1, \ldots;$	${}^2F_1, {}^2G_1, {}^2H_1, \ldots;$	${}^3F_1, {}^3G_1, {}^3H_1, \ldots;$	...

Tal como la teoría simple de los tipos descarta la posibilidad de hablar de todas las funciones o atributos, permitiendo solamente que se hable de todas las funciones de individuos, o todas las funciones de funciones de individuos, o etc., así la jerarquía de los órdenes no nos permite hablar de todas las funciones o atributos de un tipo dado, permitiéndonos hablar sólo de todas las funciones de primer orden de un tipo dado o todas las funciones de segundo orden de un tipo dado, etc. De esta manera, no podemos decir, según la teoría ramificada de los tipos, que Pepe tiene todas las buenas cualidades de Memo, lo que de ordinario se escribiría simbólicamente como

$$(F_1)\{[G_2(F_1) \cdot F_1(a)] \supset F_1(b)\}$$

En vez de ello, podemos decir que Pepe tiene todas las cualidades de *primer orden* de Memo, lo que se simboliza

$$({}^1F_1)\{[{}^1G_2({}^1F_1) \cdot {}^1F_1(a)] \supset {}^1F_1(b)\}$$

o que Pepe tiene todas las cualidades de *segundo orden* de Memo, que se escribe simbólicamente como

$$({}^2F_1)\{[{}^1G_2({}^2F_1) \cdot {}^2F_1(a)] \supset {}^2F_1(b)\}$$

o que Pepe tiene todas las cualidades de orden n de Memo para algún n especificado. Habrá que notar que el atributo de tener todos los atributos de primer orden de Memo que se escribe simbólicamente como

$$({}^1F_1)[{}^1F_1(a) \supset {}^1F_1(x)]$$

es un atributo de *segundo orden*.

La formulación precedente de la teoría ramificada de los tipos lógicos es vaga, pero suficiente para eliminar la paradoja de Grelling. En el Caso 1, el paso de (2) a (3) se rechaza basándose en que la función "Het" es de orden más alto que la variable funcional "ψ" y no se le puede instanciar en su lugar. En el Caso 2 el paso de (1) a (2) se descarta también sobre la base de que la función "Het" es de orden más alto que la variable funcional "ϕ" y no se le puede instanciar en su lugar.

Otra característica de la teoría ramificada de los tipos lógicos es que divide las *proposiciones* en una jerarquía de proposiciones de diferentes órdenes. Tal como cualquier función (de cualquier tipo) es una función de primer orden si no hace referencia a ninguna totalidad de funciones de ese tipo (es decir, que no contiene cuantificadores sobre ninguna variable funcional de ese tipo), así también cualquier proposición se dice que es una *proposición de primer orden* si no hace referencia a ninguna totalidad de proposiciones (es decir, que no contiene cuantificador sobre ninguna variable proposicional). En general, una proposición es de orden $n + 1$ si contiene un cuantificador sobre una variable proposicional de orden n, pero no contiene cuantificador sobre cualquier variable proposicional de orden m donde $m \geq n$.[6] La restricción aquí es que nunca podemos referirnos a *todas* las proposiciones sino sólo a todas las proposiciones de éste o aquel orden especificado. Así, no podemos decir que "Ninguna de las proposiciones pronunciadas por Smith tiende a incriminarlo" que parcialmente podríamos simbolizar como

$$(p)\,[(\text{Smith pronuncia } p) \supset \sim(p \text{ tiende a incriminar a Smith})]$$

pero se puede decir, en vez de esto, o que "Ninguna de las proposiciones de primer orden pronunciadas por Smith tiende a incriminarlo", o que "Ninguna de las proposiciones de segundo orden pronunciadas por Smith tiende a incriminarlo", o etc. La segunda de estas proposiciones alternativas la simbolizaríamos parcialmente como

$$({}^2p)[(\text{Smith pronuncia } {}^2p) \supset \sim({}^2p \text{ tiende a incriminar a Smith})]$$

Esa proposición contiene un cuantificador sobre una variable proposicional de orden 2 y por tanto es una proposición de orden 3.

Dividiendo las proposiciones en diferentes órdenes y permitiendo que se haga referencia sólo a proposiciones de un orden u órdenes especificados, la teoría ramificada de los tipos lógicos evita de manera efectiva que se produzca la paradoja del mentiroso. Cualquier ver-

[6] En *Principia Mathematica*, las proposiciones también se dividen en diferentes órdenes basándose en diferencias entre los órdenes de las funciones que contienen. Pero en esta exposición ignoraremos esa (dudosa) sutileza.

sión de esa paradoja involucra la afirmación de que *todas las proposiciones que satisfacen una cierta condición son falsas*, siendo la afirmación misma una proposición que satisface la condición. (La condición aludida puede *ser pronunciada por cierta persona*, o *estar escrita en cierto lugar*, o *ser pronunciada por un cretense*, o etc.) La paradoja es completamente explícita cuando la afirmación en cuestión es la *única* proposición que satisface la condición especificada, pues en ese caso, si es verdadera entonces es falsa, y si es falsa entonces es verdadera. Dicha contradicción la evita la teoría ramificada de los tipos lógicos de la manera siguiente. La afirmación puede referirse sólo a todas las proposiciones de cierto orden, de modo que sólo para un n especificado se puede afirmar que *todas las proposiciones de orden n que satisfacen cierta condición son falsas*. Pero no puede surgir paradoja aquí porque la oración en cursivas expresa una proposición de orden $n + 1$ y aun cuando satisfaga la condición especificada no es una proposición de orden n y, por tanto, no puede afirmar su propia falsedad.

La teoría ramificada de los tipos lógicos que incluye la jerarquía de los tipos, así como la jerarquía de los órdenes, fue recomendada por Russell y Whitehead no sólo por "su capacidad para resolver ciertas contradicciones" sino también por tener "una cierta consonancia con el sentido común que la hace inherentemente creíble".[7] Decían haber deducido la teoría de lo que llamaban el principio del "círculo vicioso", una de cuyas formulaciones, debida a estos autores, era: "Cualquier cosa que involucre *toda* una colección no debe ser de la colección". Pero ese principio no es obvio y su deducción putativa no es convincente.[8] El mérito principal de la teoría de los tipos o al menos de su versión ramificada parecería ser que descarta la posibilidad de las paradojas.

La teoría ramificada de los tipos lógicos trae ciertas dificultades, así como trae ventajas. Una de las dificultades es concerniente a la noción de identidad. La definición usual de identidad (de individuos) es

$$(x = y) = \mathrm{df}\,(F_1)[F_1(x) \equiv F_1(y)]$$

[7] *Principia Mathematica* por A. N. Whitehead y B. Russell, Introducción a la primera edición, Cap. II.

[8] En su "Foundations of Mathematics", F. P. Ramsey hace la observación sobre la "manera que deja mucho que desear" en que se deduce la teoría de los tipos a partir del "principio del círculo vicioso" (Pág. 356, Pág. 24 de la reimpresión), y pone en duda la validez de ese principio sosteniendo que "... podemos referirnos a un hombre como el más alto de un grupo identificándolo así por medio de una totalidad de la que él mismo es un miembro sin que haya ningún círculo vicioso" (Pág. 368, Pág. 41 de la reimpresión).

de la cual pueden deducirse todos los atributos usuales de la relación de identidad. Pero esa definición viola la teoría ramificada de los tipos lógicos, pues en ella se hace referencia a *todas* las funciones de tipo 1. Si reemplazáramos ésta por la definición

$$(x = y) = \mathrm{df}\,({}^1F_1)[{}^1F_1(x) \equiv {}^1F_1(y)]$$

que establece que x y y son idénticos si tienen todos sus atributos de *primer orden* en común, surge la posibilidad de que x y y sean idénticos (en este sentido) y, no obstante, tengan atributos de *segundo orden* diferentes. Deberá ser claro que para cualquier n definir la identidad como el compartir todos los atributos de orden n permitiría que individuos "idénticos" difiriesen con respecto a atributos de orden m con $m > n$. Si aceptamos las restricciones de la teoría ramificada de los tipos lógicos, entonces no podemos definir la relación de identidad y aun si la aceptamos como primitiva o indefinida no podríamos enunciar todas las reglas de su uso.

Otras desventajas de la teoría ramificada de los tipos lógicos son más técnicas, y nos limitamos a mencionarlas. Los matemáticos desean establecer sus teoremas para *todas* las funciones (de números), pero no pueden hacerlo si se encuentran limitados por la jerarquía de los órdenes. Además, algunos teoremas de existencia del análisis, como el de la Mínima Cota Superior, no se pueden probar dentro de las restricciones de la teoría ramificada de los tipos. La teoría del infinito, de Cantor, que es básica para casi todas las matemáticas modernas, no se puede establecer en el marco demasiado rígido de la teoría ramificada de los tipos lógicos, y aun el principio de inducción matemática debe abandonarse en toda su generalidad, pues su enunciado completo no es permitido por la teoría ramificada de los tipos.

Se ha introducido el "Axioma de Reductibilidad" para aflojar las excesivas restricciones de la jerarquía de los órdenes. Ese axioma afirma que a cualquier función de cualquier orden y cualquier tipo corresponde formalmente una función equivalente de *primer orden* del mismo tipo (dos funciones son *formalmente equivalentes* cuando para cualquier argumento admisible son o ambas verdaderas o ambas son falsas). Teniendo este axioma *puede* definirse a satisfacción la relación de identidad en términos de funciones de primer orden y todas las desventajas mencionadas en el párrafo precedente se desvanecen. La pregunta siguiente se presenta de manera natural: ¿El Axioma de Reductibilidad relaja las restricciones de la teoría ramificada de los tipos lógicos al grado de que puedan reintroducirse las paradojas? Parece claro que si a un sistema lógico como el de *Principia Mathematica* que contiene la teoría ramificada de los tipos, así como el Axioma de Reductibilidad, se agregan *todos* los términos semánticos tales como "verdadero", "falso" y "designa", así como nombres para todas las funciones, entonces reaparecen al menos algunas de las paradojas[9]. Por otro lado, si no se incluyen los nombres de *algunas* funciones, entonces, aun teniendo los términos semánticos, no parece que se puedan obtener las paradojas incluso con ayuda del Axioma de Reductibilidad.[10]

Bien podría ser éste el lugar apropiado para indicar en forma breve cómo es notable la semejanza entre el método de los "niveles de lenguaje" para evitar las paradojas semánticas[11] y la jerarquía de los órdenes de la teoría ramificada de los tipos lógicos.[12] Limitando nuestras observaciones a la paradoja de Grelling notamos que no surge en un lenguaje objeto (como el cálculo funcional extendido, por ejemplo) cuando suponemos que en el mismo no hay símbolos que designen símbolos. Tampoco surge en el metalenguaje de ese lenguaje objeto. Como el metalenguaje contiene sinónimos para todos los símbolos del lenguaje objeto y nombres para todos los símbolos del lenguaje objeto, así como sus propias variables y la relación de nombre (que escribimos como "Des"), el símbolo "Het" puede definirse en él. Por definición:

$$\mathrm{Het}(v) \cdot \equiv : \cdot (\exists \phi) : v \mathrm{Des} \phi \cdot v \mathrm{Des} \psi \equiv_{\psi} \psi = \phi \cdot \sim \phi(v)$$

Aun así, no se puede derivar la paradoja de Grelling en el metalenguaje, pues aunque hay un símbolo para la función Het, no hay símbolo para el nombre de esa función. En otras palabras, en el metalenguaje, aunque podríamos sustituir "Het" por "ϕ", no podemos sustituir ""Het"" por "v" porque ""Het"" no es un símbolo del metalenguaje.*

Hasta aquí no tenemos complicaciones. La paradoja no surge en el lenguaje objeto porque no contiene nombres para los símbolos del mismo; y no surge en el metalenguaje porque no hay nombre para el símbolo funcional "Het" en ese lenguaje. La *amenaza* de la Grelling sólo aparece en el meta-metalenguaje. *Si* se ignoran ciertas

---

[9] Véase el artículo del autor sobre "La Inconsistencia o Redundancia de *Principia Mathematica*" en *Philosophy and Phenomenological Research*, Vol. XI, No. 2 (diciembre de 1950), Págs. 190-199.

[10] Véase la revisión del artículo precedente por Alonzo Church en *The Journal of Symbolic Logic*, Vol. XVI, No. 2 (junio de 1951), Págs. 154-155.

[11] Sugerido por primera vez por Bertrand Russell en su introducción a L. Wittgenstein, *Tractatus logico-philosophicus* (Londres y Nueva York, 1922), Pág. 23.

[12] El resto de este apéndice se reimprime con autorización de "The Inconsistency or Redundancy of *Principia Mathematica*", *Philosophy and Phenomenological Research*, Vol. XI. Copyright 1950 por la University of Buffalo.

* Por razones tipográficas no se uniformaron los símbolos de comillas y comillas dobles en el texto y las fórmulas intercaladas. Pero no debe haber confusión. (N. del T.)

protecciones o refinamientos de la teoría de los niveles del lenguaje, parece derivable la paradoja. Ignorando esas protecciones, por definición, tenemos, en el meta-metalenguaje,

$$\mathrm{Het}(v) \cdot \equiv : \cdot (\exists\phi) : v\mathrm{Des}\phi \cdot v\mathrm{Des}\psi \equiv_{\psi} \psi = \phi \cdot \sim\phi(v)$$

Como el meta-metalenguaje *contiene* un nombre para el símbolo funcional "Het", sustituimos ese nombre ""Het"" por la variable "v" y obtenemos la contradicción como en nuestra primera derivación de la misma.

La manera en que las protecciones que da la teoría de los niveles del lenguaje sirven para evitar esta contradicción la asemeja mucho a la teoría de los órdenes. La definición de Het en el meta-metalenguaje, que escribimos antes, requiere que se agreguen supraíndices para resolver su ambigüedad. Una vez que se han señalado y resuelto estas ambigüedades, se desvanece la contradicción.

En primer lugar, el meta-metalenguaje contiene dos símbolos para la relación nombre, "Des_1" y "Des_2".[13] El primero de éstos es el sinónimo del meta-metalenguaje para la relación nombre en el metalenguaje. La oración completa

$$v\mathrm{Des}_1\phi$$

afirma que el símbolo funcional denotado con "v" es un símbolo del lenguaje objeto y designa la función ϕ. El segundo no tiene sinónimo en el metalenguaje. La oración total

$$v\mathrm{Des}_2\phi$$

afirma que el símbolo funcional denotado con "v" es un símbolo del metalenguaje y designa la función ϕ. Son completamente diferentes.

Y en segundo lugar el meta-metalenguaje contiene dos símbolos "Het_1" y "Het_2" entre cuyos significados hay una diferencia significativa. El primero de éstos es el símbolo sinónimo del meta-metalenguaje para el símbolo funcional "Het" del metalenguaje. La oración

$$\mathrm{Het}_1(v)$$

afirma que el símbolo funcional denotado con "v" es un símbolo del lenguaje objeto y designa en el lenguaje objeto un atributo que no posee. El segundo no tiene sinónimo en el metalenguaje. La oración

$$\mathrm{Het}_2(v)$$

---

[13] Como lo sugirió Ramsey en un contexto ligeramente diferente. Obra citada en Pág. 370, en reimpresión, Pág. 43.

afirma que el símbolo funcional denotado por "*v*" es un símbolo del metalenguaje y designa en el metalenguaje un atributo que no posee. Sus definiciones difieren:

$$\mathrm{Het}_1(v) = \mathrm{df}\,(\exists\phi){:}v\mathrm{Des}_1\phi\cdot v\mathrm{Des}_1\psi \equiv_\psi \psi = \phi\cdot\sim\phi(v)$$

y

$$\mathrm{Het}_2(v) = \mathrm{df}\,(\exists\phi){:}v\mathrm{Des}_2\phi\cdot v\mathrm{Des}_2\psi \equiv_\psi \psi = \phi\cdot\sim\phi(v)$$

Es obvio que no podemos definir Het_1, en términos de Des_2 porque los valores de los argumentos de una y otra son términos de lenguaje diferentes, del lenguaje objeto para Het_1, y del metalenguaje para Des_2. La misma consideración basta para mostrar que Het_2 no se puede definir en términos de Des_1.

No se puede derivar ninguna versión de la Grelling a partir de la definición de Het_1, porque los únicos valores de sus argumentos son términos del lenguaje objeto, y no hay término del lenguaje objeto análogo a "Het_1" o "Het_2". La única posibilidad está en la dirección de derivar una contradicción a partir de la definición de Het_2 y esto lo impide algo que es notablemente parecido a la teoría de los órdenes de *Principia*.

En la definición de Het_2 no podemos sustituir "*v*" por el nombre del símbolo para esa función, porque aunque el símbolo funcional "Het_2" ocurre en el meta-metalenguaje, ningún *nombre* de ese símbolo funcional lo hace. Lo más que podemos hacer es sustituir el nombre en el meta-metalenguaje del símbolo funcional del metalenguaje que es sinónimo de "Het_1" para el cual *tenemos* un nombre en el meta-metalenguaje (llámesele "'Het'"). Hecha esta sustitución, se tiene

$$\mathrm{Het}_2(\text{'Het'})\cdot \equiv :\cdot(\exists\phi){:}\text{'Het'}\mathrm{Des}_2\phi\cdot\text{'Het'}\mathrm{Des}_2\psi \equiv_\psi \psi = \phi\cdot\sim\phi(\text{'Het'})$$

Si intentamos deducir una contradicción a partir de esta equivalencia por un argumento paralelo a las versiones anteriores, no lo podemos hacer. Hay que elegir un símbolo funcional para sustituir la variable funcional generalizada "ψ", pues hay dos símbolos funcionales en nuestro meta-metalenguaje que prometen: "Het_1" y "Het_2".

Si sustituimos "Het_1", obtenemos

$$\mathrm{Het}_2(\text{'Het'})\cdot \supset :\text{'Het'}\mathrm{Des}_2\phi\cdot\text{'Het'}\mathrm{Des}_2\mathrm{Het}_1 \equiv \mathrm{Het}_1 = \phi\cdot\sim\phi(\text{'Het'})$$

Dado que "'Het'" es el nombre en el meta-metalenguaje del símbolo funcional del metalenguaje que es sinónimo de "Het_1", tenemos

$$\text{'Het'}\mathrm{Des}_2\mathrm{Het}_1\cdot\text{'Het'}\mathrm{Des}_2\mathrm{Het}_1 \equiv \mathrm{Het}_1 = \phi$$

y en consecuencia

$$\mathrm{Het}_2(\text{'Het'}) \supset \sim\mathrm{Het}_1(\text{'Het'})$$

Pero esto no es parte de ninguna contradicción, ya que de antemano se conoce, por otro lado; pues si cualquier término satisface Het_2 está en el metalenguaje y no en el lenguaje objeto, mientras que solamente términos del lenguaje objeto satisfacen Het_1.

Por otra parte, si sustituimos "Het_2", obtenemos

$$\mathrm{Het}_2(\text{'Het'}) \supset :\text{'Het'}\mathrm{Des}_2\phi\cdot\text{'Het'}\mathrm{Des}_2\mathrm{Het}_2 \equiv \mathrm{Het}_2 = \phi \quad \sim\phi(\text{'Het'})$$

De aquí, si ""Het"$\mathrm{Des}_2\mathrm{Het}_2$" fuese verdadera podríamos obtener una contradicción. Pero ""Het"$\mathrm{Des}_2\mathrm{Het}_2$" *no* es verdadera, porque el argumento ""Het"" denota un símbolo del metalenguaje mientras que el atributo denotado por el argumento "Het_2" no está denotado por símbolo alguno del metalenguaje. En otras palabras ""Het"Des_2 Het" es falso porque "Het_2" es un símbolo del meta-metalenguaje que no tiene sinónimo en el metalenguaje.

Esto es muy parecido a la teoría de los órdenes, porque se salva o evita la contradicción disponiendo que ciertos símbolos del meta-metalenguaje se definan *sobre ciertas partes*. Así "Des_1" se define sobre una parte más pequeña que "Des_2" y "Het_1" se define sobre una parte más pequeña que "Het_2"; Des_1 y Het_1 sólo se satisfacen con símbolos del lenguaje objeto, Des_2 y Het_2 sólo se satisfacen con símbolos del metalenguaje, que es un lenguaje más amplio e incluyente. No sólo la teoría de los niveles del lenguaje es notablemente análoga a la teoría de los órdenes sino que también si cada metalenguaje se concibe como incluyendo al lenguaje objeto del que trata,[14] se le puede identificar con la teoría Russelliana de los órdenes *aplicados a los símbolos* y no a las funciones que denotan.

A pesar de las semejanzas indicadas hay diferencias fundamentales entre dichas teorías. La más significativa es que, a diferencia de la teoría ramificada de los tipos, el método de los niveles de lenguaje para evitar las paradojas no pone en peligro la deducción de ninguna parte de las matemáticas clásicas, así que no aparece la necesidad de un análogo del axioma de reductibilidad.

---

[14] Esta manera de ver el metalenguaje la recomienda A. Tarski en su "Semantic Conception of Truth", *Philosophy and Phenomenological Research*, Vol. IV (1944), Págs. 341-375. Reimpreso en H. Feigl y W. Sellars, *Readings in Philosophical Analysis* (Nueva York, 1949), Págs. 52-84. Véase, especialmente, la Pág. 350 en la reimpresión, Págs. 60-61.

Soluciones de Ejercicios Selectos

Ejercicios de las Págs. 29-30

I. 1. F 5. T 10. F 15. F
II. 1. $(A \cdot B) \vee C$ 5. $(C \vee D) \cdot \sim(C \cdot D)$
III. 1. $S \cdot W$ 5. $G \cdot S$

Ejercicios de la Pág. 34

I. 1. T 5. F 10. T 15. T
II. 1. $(A \cdot C) \supset \sim D$ 5. $\sim A \supset \sim(C \vee D)$ 10. $(A \supset \sim C) \cdot (\sim C \supset D)$

Ejercicios de las Págs. 41-42

I. a. 4 es la forma específica de a. e. 13 tiene e como instancia de sustitución.
j. 10 tiene j como instancia de sustitución, y 20 es la forma específica de j.
II. 1. Válida. 5. Inválida—se ve en el renglón 2. 10. Inválida—lo muestra el renglón 1. 15. Válida.
III. 1. Inválida—lo muestra el renglón 1. 5. Válida. 10. Inválida—lo muestra el renglón 3. 15. Inválida—lo muestra el renglón 12.

Ejercicios de las Págs. 47-48

I. 1. Contingente—**F** en el renglón 1, **T** en el renglón 2. 5. Tautológica.
II. 1. No equivalentes—lo muestran los renglones 2 y 3. 5. Equivalentes.

Ejercicios de las Págs. 51-55

I. 1. Simplificación (Simp.). 5. Silogismo Hipotético (S.H.)
10. Dilema Constructivo (D.C.)

II. 1.	3. 2, Simp.	5.	4. 3, Simp.	10.	7. 1, 6, M.T.
	4. 1, 3, M.P.		5. 2, 4, M.P.		8. 2, 6, M.T.
	5. 3, Simp.		6. 4, Simp.		9. 7, 8, Conj.
	6. 4, 5, M.P.		7. 6, Add.		10. 3, 9, M.P.
	7. 6, Simp.		8. 1, 7, M.P.		11. 4, 10, C.D.
	8. 7, Add.		9. 8, 5, H.S.		12. 5, 11, D.D.

III. 1. 1. $A \supset B$
2. $C \supset D$

3. $(\sim B \vee \sim D)\cdot(\sim A \vee \sim B)$ $/\therefore \sim A \vee \sim C$
4. $(A \supset B)\cdot(C \supset D)$ 1, 2, Conj.
5. $\sim B \vee \sim D$ 3, Simp.
6. $\sim A \vee \sim C$ 4, 5, D.D.

5. 1. $(R \supset \sim S)\cdot(T \supset \sim U)$
2. $(V \supset \sim W)\cdot(X \supset \sim Y)$
3. $(T \supset W)\cdot(U \supset S)$
4. $V \vee R$ $/\therefore \sim T \vee \sim U$
5. $V \supset \sim W$ 2, Simp.
6. $R \supset \sim S$ 1, Simp.
7. $(V \supset \sim W)\cdot(R \supset \sim S)$ 5, 6, Conj.
8. $\sim W \vee \sim S$ 7, 5, C.D.
9. $\sim T \vee \sim U$ 3, 8, D.D.

IV. **1.** 1. $(A \vee G) \supset S$
2. $A\cdot T$ $/\therefore S$
3. A 2, Simp.
4. $A \vee G$ 3, Add.
5. S 1, 4, M.P.

5. 1. $(\sim K\cdot P) \supset (B \vee R)$
2. $\sim K \supset (B \supset D)$
3. $K \vee (R \supset E)$
4. $\sim K\cdot P$ $/\therefore D \vee E$
5. $\sim K$ 4, Simp.
6. $B \supset D$ 2, 5, M.P.
7. $R \supset E$ 3, 5, D.S.
8. $(B \supset D)\cdot(R \supset E)$ 6, 7, Conj.
9. $B \vee R$ 1, 4, M.P.
10. $D \vee E$ 8, 9, C.D.

10. 1. $T \vee (E \supset D)$
2. $T \supset C$
3. $(E \supset G) \supset (D \supset I)$
4. $(\sim T\cdot \sim C) \supset (D \supset G)$
5. $\sim C$
6. $\sim I \vee \sim G$ $/\therefore \sim D \vee \sim E$
7. $\sim T$ 2, 5, M.T.
8. $E \supset D$ 1, 7, D.S.
9. $\sim T\cdot \sim C$ 7, 5, Conj.
10. $D \supset G$ 4, 9, M.P.
11. $E \supset G$ 8, 10, H.S.
12. $D \supset I$ 3, 11, M.P.
13. $(D \supset I)\cdot(E \supset G)$ 12, 11, Conj.
14. $\sim D \vee \sim E$ 13, 6, D.D.

Ejercicios de las Págs. 60-65

I. 1. Conmutación (Conm.) **5.** Tautología (Taut.) **10.** Conmutación (Conm.) **15.** Distribución (Dist.)

II. 1.
3. 2, Add.
4. 3, De M.
5. 1, 4, M.T.
6. 5, De M.
7. 6, Com.
8. 7, Simp.

5.
4. 1, Exp.
5. 2, Impl.
6. 5, Taut.
7. 4, 6, M.T.
8. 7, De M.
9. 3, 8, D.D.
10. 9, Impl.

III. 1.
1. $\sim A$ $\quad /\therefore A \supset B$
2. $\sim A \lor B$ $\quad$ 1, Add.
3. $A \supset B$ $\quad$ 2, Impl.

5.
1. $K \supset L$ $\quad /\therefore K \supset (L \lor M)$
2. $\sim K \lor L$ $\quad$ 1, Impl.
3. $(\sim K \lor L) \lor M$ $\quad$ 2, Add.
4. $\sim K \lor (L \lor M)$ $\quad$ 3, **Asoc.**
5. $K \supset (L \lor M)$ $\quad$ 4, Impl.

10.
1. $A \supset \sim(B \supset C)$
2. $(D \cdot B) \supset C$
3. D $\quad /\therefore \sim A$
4. $D \supset (B \supset C)$ $\quad$ 2, Exp.
5. $B \supset C$ $\quad$ 4, 3, M.P.
6. $\sim\sim(B \supset C)$ $\quad$ 5, D.N.
7. $\sim A$ $\quad$ 1, 6, M.T.

15.
1. $(\sim U \lor V) \cdot (U \lor W)$
2. $\sim X \supset \sim W$ $\quad /\therefore V \lor X$
3. $\sim U \lor V$ $\quad$ 1, Simp.
4. $U \supset V$ $\quad$ 3, Impl.
5. $W \supset X$ $\quad$ 2, Trans.
6. $(U \supset V) \cdot (W \supset X)$ $\quad$ 4, 5, Conj.
7. $(U \lor W) \cdot (\sim U \lor V)$ $\quad$ 1, Com.
8. $U \lor W$ $\quad$ 7, Simp.
9. $V \lor X$ $\quad$ 6, 8, C.D.

IV. 1.
1. $S \supset G$
2. $\sim S \supset E$ $\quad /\therefore G \lor E$
3. $\sim G \supset \sim S$ $\quad$ 1, Trans.
4. $\sim G \supset E$ $\quad$ 3, 2, H.S.
5. $\sim\sim G \lor E$ $\quad$ 4, Impl.
6. $G \lor E$ $\quad$ 5, D.N.

5.
1. $(G \cdot L) \lor (W \cdot T)$
2. $\sim G$ $\quad /\therefore T$
3. $\sim G \lor \sim L$ $\quad$ 2, Add.
4. $\sim(G \cdot L)$ $\quad$ 3, De M.
5. $W \cdot T$ $\quad$ 1, 4, D.S.
6. $T \cdot W$ $\quad$ 5, Com.
7. T $\quad$ 6, Simp.

10.
1. $B \lor T$
2. $(B \lor C) \supset (L \cdot M)$
3. $\sim L$ $\quad /\therefore T$
4. $\sim L \lor \sim M$ $\quad$ 3, Add.
5. $\sim(L \cdot M)$ $\quad$ 4, De M.
6. $\sim(B \lor C)$ $\quad$ 2, 5, M.T.
7. $\sim B \cdot \sim C$ $\quad$ 6, De M.
8. $\sim B$ $\quad$ 7, Simp.
9. T $\quad$ 1, 8, D.S.

15.
1. $(W \supset M) \cdot (I \supset E)$
2. $W \lor I$
3. $(W \supset \sim E) \cdot (I \supset \sim M)$ $\quad /\therefore E \equiv \sim M$
4. $M \lor E$ $\quad$ 1, 2, C.D.
5. $\sim E \lor \sim M$ $\quad$ 3, 2, C.D.
6. $E \supset \sim M$ $\quad$ 5, Impl.
7. $\sim\sim M \lor E$ $\quad$ 4, D.N.
8. $\sim M \supset E$ $\quad$ 7, Impl.
9. $(E \supset \sim M) \cdot (\sim M \supset E)$ $\quad$ 6, 8, Conj.
10. $E \equiv \sim M$ $\quad$ 9, Equiv.

21.
1. $(T \supset E) \cdot (A \supset L)$ $\quad /\therefore (T \lor A) \supset (E \lor L)$
2. $T \supset E$ $\quad$ 1, Simp.
3. $\sim T \lor E$ $\quad$ 2, Impl.
4. $(\sim T \lor E) \lor L$ $\quad$ 3, Add.
5. $\sim T \lor (E \lor L)$ $\quad$ **4, Asoc.**
6. $(E \lor L) \lor \sim T$ $\quad$ 5, Com.
7. $(A \supset L) \cdot (T \supset E)$ $\quad$ 1, Com.
8. $A \supset L$ $\quad$ 7, Simp.

9. $\sim A \vee L$	8, Impl.
10. $(\sim A \vee L) \vee E$	9, Add.
11. $\sim A \vee (L \vee E)$	10, Asoc.
12. $\sim A \vee (E \vee L)$	11, Com.
13. $(E \vee L) \vee \sim A$	12, Com.
14. $[(E \vee L) \vee \sim T] \cdot [(E \vee L) \vee \sim A]$	6, 13, Conj.
15. $(E \vee L) \vee (\sim T \cdot \sim A)$	14, Dist.
16. $(\sim T \cdot \sim A) \vee (E \vee L)$	15, Com.
17. $\sim(T \vee A) \vee (E \vee L)$	16, De M.
18. $(T \vee A) \supset (E \vee L)$	17, Impl.

Ejercicios de la Pág. 67

1.

A	B	C	D
F	**T**	**F**	**F**

5.

	T	U	V	W	X
	T	**T**	**T**	**T**	**F**
o	**F**	**F**	**T**	**F**	**T**

Ejercicios de la Pág. 74

21.

1. $(T \supset E) \cdot (A \supset L)$	$/\therefore (T \vee A) \supset (E \vee L)$	
2. $T \vee A$	$/\therefore E \vee L$	
3. $E \vee L$		1, 2, C.D.

Ejercicios de la Pág. 78

3.

1. $(H \supset I) \cdot (J \supset K)$			
2. $(I \vee K) \supset L$			
3. $\sim L$ $\quad /\therefore \sim(H \vee J)$			
4. $\sim(I \vee K)$	2, 3, M.T.	4′. $\sim\sim(H \vee J)$	I.P.
5. $\sim I \cdot \sim K$	4, De M.	5′. $H \vee J$	4′, D.N.
6. $\sim I$	5, Simp.	6′. $I \vee K$	1, 5′, C.D.
7. $H \supset I$	1, Simp.	7′. L	2, 6′, M.P.
8. $\sim H$	7, 6, M.T.	8′. $L \cdot \sim L$	7′, 3, Conj.
9. $(J \supset K) \cdot (H \supset I)$	1, Com.		
10. $J \supset K$	9, Simp.		
11. $\sim K \cdot \sim I$	5, Com.		
12. $\sim K$	11, Simp.		
13. $\sim J$	10, 12, M.T.		
14. $\sim H \cdot \sim J$	8, 13, Conj.		
15. $\sim(H \vee J)$	14, De M.		

5.

1. $(V \supset \sim W) \cdot (X \supset Y)$			
2. $(\sim W \supset Z) \cdot (Y \supset \sim A)$			
3. $(Z \supset \sim B) \cdot (\sim A \supset C)$			
4. $V \cdot X$ $\quad /\therefore \sim B \cdot C$			
5. $V \supset \sim W$	1, Simp.	5′. $\sim(\sim B \cdot C)$	I.P.
6. V	4, Simp.	6′. $\sim\sim B \vee \sim C$	5′, De M.
7. $\sim W$	5, 6, M.P.	7′. $\sim Z \vee \sim\sim A$	3, 6′, D.D.
8. $\sim W \supset Z$	2, Simp.	8′. $\sim\sim W \vee \sim Y$	2, 7′, D.D.
9. Z	8, 7, M.P.	9′. $\sim V \vee \sim X$	1, 8′, D.D.
10. $Z \supset \sim B$	3, Simp.	10′. $\sim(V \cdot X)$	9′, De M.

11. $\sim B$	10, 9, M.P.	11′. $(V \cdot X) \cdot \sim(V \cdot X)$	4, 10′, Conj.
12. $(X \supset Y) \cdot (V \supset W)$	1, Com.		
13. $X \supset Y$	12, Simp.		
14. $X \cdot V$	4, Com.		
15. X	14, Simp.		
16. Y	13, 15, M.P.		
17. $(Y \supset \sim A) \cdot (\sim W \supset Z)$	2, Com.		
18. $Y \supset \sim A$	17, Simp.		
19. $\sim A$	18, 16, M.P.		
20. $(\sim A \supset C) \cdot (Z \supset \sim B)$	3, Com.		
21. $\sim A \supset C$	20, Simp.		
22. C	21, 19, M.P.		
23. $\sim B \cdot C$	11, 22, Conj.		

Ejercicios de las Págs. 79-80

I. 1. 1. P $\quad /\therefore Q \supset P$ $\quad$ (C.P.)
2. $P \vee \sim Q$ $\quad$ 1, Add.
3. $\sim Q \vee P$ $\quad$ 2, Com.
4. $Q \supset P$ $\quad$ 3, Impl.

5. 1. $\sim\sim P$ $\quad /\therefore P$ $\quad$ (C.P.)
2. P $\quad$ 1, D.N.

10. 1. $A \supset B$ $\quad /\therefore A \supset (A \cdot B)$ $\quad$ (C.P.)
2. A $\quad /\therefore A \cdot B$ $\quad$ (C.P.)
3. B $\quad$ 1, 2, M.P.
4. $A \cdot B$ $\quad$ 2, 3, Conj.

15. 1. $A \supset (B \cdot C)$ $\quad /\therefore [B \supset (D \cdot E)] \supset (A \supset D)$ $\quad$ (C.P.)
2. $B \supset (D \cdot E)$ $\quad /\therefore A \supset D$ $\quad$ (C.P.)
3. A $\quad /\therefore D$ $\quad$ (C.P.)
4. $B \cdot C$ $\quad$ 1, 3, M.P.
5. B $\quad$ 4, Simp.
6. $D \cdot E$ $\quad$ 2, 5, M.P.
7. D $\quad$ 6, Simp.

II. 1. 1. $\sim[(A \supset B) \vee (A \supset \sim B)]$ $\quad /\therefore (A \supset B) \vee (A \supset \sim B)$ $\quad$ (I.P.)
2. $\sim(A \supset B) \cdot \sim(A \supset \sim B)$ $\quad$ 1, De M.
3. $\sim(\sim A \vee B) \cdot \sim(\sim A \vee \sim B)$ $\quad$ 2, Impl.
4. $(\sim\sim A \cdot \sim B) \cdot (\sim\sim A \cdot \sim\sim B)$ $\quad$ 3, De M.
5. $(\sim\sim A \cdot \sim B) \cdot (\sim\sim B \cdot \sim\sim A)$ $\quad$ 4, Com.
6. $[(\sim\sim A \cdot \sim B) \cdot \sim\sim B] \cdot \sim\sim A$ $\quad$ 5, **Asoc.**
7. $[\sim\sim A \cdot (\sim B \cdot \sim\sim B)] \cdot \sim\sim A$ $\quad$ 6, **Asoc.**
8. $[(\sim B \cdot \sim\sim B) \cdot \sim\sim A] \cdot \sim\sim A$ $\quad$ 7, Com.
9. $(\sim B \cdot \sim\sim B) \cdot (\sim\sim A \cdot \sim\sim A)$ $\quad$ 8, **Asoc.**
10. $\sim B \cdot \sim\sim B$ $\quad$ 9, Simp.

5. 1. $\sim[(A \supset B) \vee (\sim A \supset C)]$ $\quad /\therefore (A \supset B) \vee (\sim A \supset C)$ $\quad$ (I.P.)
2. $\sim(A \supset B) \cdot \sim(\sim A \supset C)$ $\quad$ 1, De M.
3. $\sim(\sim A \vee B) \cdot \sim(\sim\sim A \vee C)$ $\quad$ 2, Impl.
4. $(\sim\sim A \cdot \sim B) \cdot (\sim\sim\sim A \cdot \sim C)$ $\quad$ 3, De M.

5. $\sim\sim A\cdot[\sim B\cdot(\sim\sim\sim A\cdot\sim C)]$ 4, Asoc.
6. $\sim\sim A\cdot[(\sim\sim\sim A\cdot\sim C)\cdot\sim B]$ 5, Com.
7. $\sim\sim A\cdot[\sim\sim\sim A\cdot(\sim C\cdot\sim B)]$ 6, Asoc.
8. $(\sim\sim A\cdot\sim\sim\sim A)\cdot(\sim C\cdot\sim B)$ 7, Asoc.
9. $\sim\sim A\cdot\sim\sim\sim A$ 8, Simp.

Ejercicios de la Pág. 84

I. 1. $A \supset B$
2. $B \supset [(C \supset \sim\sim C) \supset D]$ $/\therefore A \supset D$
3. A
4. B 1, 3, M.P.
5. $(C \supset \sim\sim C) \supset D$ 2, 4, M.P.
6. C
7. $\sim\sim C$ 6, D.N.
8. $C \supset \sim\sim C$ 6–7, C.P.
9. D 5, 8, M.P.
10. $A \supset D$ 3–9, C.P.

Ejercicios de las Págs. 94 95

I. **1.** $(x)[Sx \supset Rx]$ **5.** $(x)[Sx \supset Ex]$
10. $(x)[Dx \supset Bx]$ **15.** $(x)[Cx \supset (\sim Wx \vee Sx)]$
20. $(x)[(Ix\cdot Ux) \supset (Px \vee Fx)$
25. $(x)[(Ax\cdot Ox) \supset (Dx \supset \sim Rx)]$
30. $(x)[(Cx\cdot Dx) \supset Ex]$

II. 1 $(x)[Cx \supset Bx]$ **5.** $(x)[Mx \supset (Vx\cdot Fx)]$

Ejercicios de las Págs. 101-102

I. **1.** 1. $(x)[Ax \supset Bx]$
2. $\sim Bt$ $/\therefore \sim At$
3. $At \supset Bt$ 1, UI
4. $\sim At$ 3, 2, M.T.

5. 1. $(x)[Kx \supset Lx]$
2. $(x)[(Kx\cdot Lx) \supset Mx]$ $/\therefore (x)[Kx \supset Mx]$
3. Ky
4. $Ky \supset Ly$ 1, UI
5. Ly 4, 3, M.P.
6. $Ky\cdot Ly$ 3, 6, Conj.
7. $(Ky\cdot Ly) \supset My$ 2, UI
8. My 7, 6, M.P.
9. $Ky \supset My$ 3-8, C.P.
10. $(x)[Kx \supset Mx]$ 9, UG

II. 1. 1. $(x)[Ax \supset Bx]$
2. $\sim Bc$ $/\therefore \sim Ac$
3. $Ac \supset Bc$ 1, UI
4. $\sim Ac$ 3, 2, M.T.

5. 1. $(x)[Lx \supset Mx]$
2. $(\exists x)[Lx\cdot Nx]$ $/\therefore (\exists x)[Nx\cdot Mx]$
3. $La\cdot Na$ 2, EI
4. $La \supset Ma$ 1, UI
5. La 3, Simp.

6.	Ma	4, 5, M.P.
7.	$Na \cdot La$	3, Com.
8.	Na	7, Simp.
9.	$Na \cdot Ma$	8, 6, Conj.
10.	$(\exists x)[Nx \cdot Mx]$	9, **EG**

10. 1. $(x)[Dx \supset Ex]$
2. $(x)[Ex \supset Fx]$
3. $(x)[Fx \supset Gx] \quad /\therefore (x)[Dx \supset Gx]$
4. $Dy \supset Ey$ — 1, **UI**
5. $Ey \supset Fy$ — 2, **UI**
6. $Fy \supset Gy$ — 3, **UI**
7. $Dy \supset Fy$ — 4, 5, H.S.
8. $Dy \supset Gy$ — 7, 6, H.S.
9. $(x)[Dx \supset Gx]$ — 8, **UG**

15. 1. $(x)[(Bx \vee Vx) \supset (Ox \cdot Dx)] \quad /\therefore (x)[Bx \supset Dx]$
2. By
3. $(By \vee Vy) \supset (Oy \cdot Dy)$ — 1, **UI**
4. $By \vee Vy$ — 2, Add.
5. $Oy \cdot Dy$ — 3, 4, M.P.
6. $Dy \cdot Oy$ — 5, Com.
7. Dy — 6, Simp.
8. $By \supset Dy$ — 2–7, C.P.
9. $(x)[Bx \supset Dx]$ — 8, **UG**

20. 1. $(x)\{(Bx \vee Wx) \supset [(Ax \vee Fx) \supset Sx]\} \quad /\therefore (x)[Bx \supset (Ax \supset Sx)]$
2. By
3. Ay
4. $(By \vee Wy) \supset [(Ay \vee Fy) \supset Sy]$ — 1, **UI**
5. $By \vee Wy$ — 2, Add
6. $(Ay \vee Fy) \supset Sy$ — 4, 5, M.P.
7. $Ay \vee Fy$ — 3, Add.
8. Sy — 6, 7, M.P.
9. $Ay \supset Sy$ — 3–8, C.P.
10. $By \supset (Ay \supset Sy)$ — 2–9, C.P.
11. $(x)[Bx \supset (Ax \supset Sx)]$ — 10, **UG**

Ejercicios de las Págs. 106-108

I. 1. $(\exists x)[Ax \cdot Bx]$ $\quad \boxed{a, c} \quad$ $(Aa \cdot Ba) \vee (Ac \cdot Bc)$
Ac $\qquad\qquad\qquad\qquad$ Ac
$\therefore Bc$ $\qquad\qquad\qquad\quad$ $\therefore Bc$

Aa	Ac	Ba	Bc
T	**T**	**T**	**F**

5. $(\exists x)[Kx \cdot Lx]$ $\boxed{a, b}$ $(Ka \cdot La) \vee (Kb \cdot Lb)$
$(\exists x)[\sim Kx \cdot \sim Lx]$ $(\sim Ka \cdot \sim La) \vee (\sim Kb \cdot \sim Lb)$
$\therefore (\exists x)[Lx \cdot \sim Kx]$ $\therefore (La \cdot \sim Ka) \vee (Lb \cdot \sim Kb)$

	Ka	*Kb*	*La*	*Lb*
	T	**F**	**T**	**F**
o	**F**	**T**	**F**	**T**

II. 1. $(x)[Ax \supset Bx]$ $\boxed{j}$ $Aj \supset Bj$
Bj Bj
$\therefore Aj$ $\therefore Aj$

Aj	*Bj*
F	**T**

5. $(x)[Kx \supset \sim Lx]$ $\boxed{a, b}$ $(Ka \supset \sim La) \cdot (Kb \supset \sim Lb)$
$(\exists x)[Mx \cdot Lx]$ $(Ma \cdot La) \vee (Mb \cdot Lb)$
$\therefore (x)[Kx \supset \sim Mx]$ $\therefore (Ka \supset \sim Ma) \cdot (Kb \supset \sim Mb)$

	Ka	*Kb*	*La*	*Lb*	*Ma*	*Mb*
	T	**F**	**F**	**T**	**T**	**T**
o	**F**	**T**	**T**	**F**	**T**	**T**

III. 1. $(x)[Ax \supset Bx]$ $\boxed{j}$ $Aj \supset Bj$
Bj Bj
$\therefore Aj$ $\therefore Aj$

Aj	*Bj*
F	**T**

5.
1. $(x)[Vx \supset Cx]$
2. $(\exists x)[Rx \cdot \sim Cx]$ $/\therefore (\exists x)[Rx \cdot \sim Vx]$
3. $Ra \cdot \sim Ca$ 2, **EI**
4. $Va \supset Ca$ 1, **UI**
5. $\sim Ca \cdot Ra$ 3, Com.
6. $\sim Ca$ 5, Simp.
7. $\sim Va$ 4, 6, M.T.
8. Ra 3, Simp.
9. $Ra \cdot \sim Va$ 8, 7, Conj.
10. $(\exists x)[Rx \cdot \sim Vx]$ 9, **EG**

10. $(x)[Tx \supset (Ox \vee Ex)]$ $\boxed{a}$ $Ta \supset (Oa \vee Ea)$
$(x)[(Ox \cdot Tx) \supset \sim Ex]$ $(Oa \cdot Ta) \supset \sim Ea$
$(\exists x)[Tx \cdot Ex]$ $Ta \cdot Ea$
$\therefore (\exists x)[Tx \cdot Ox]$ $\therefore Ta \cdot Oa$

Ta	*Oa*	*Ea*
T	**F**	**T**

Ejercicios de las Págs. 113-114

1. $(\exists x)[Dx] \supset (\exists y)[Py \cdot By]$
5. $(x)[Bx \supset (Yx \supset Rx)]$
10. $(x)\{(Ox \cdot Px) \supset [(y)(My \supset \sim Py) \vee Mx]\}$
15. $(x)\{[Sx \cdot (y)(Sy \supset Wy)] \supset Wx\}$

Ejercicios de las Págs. 126-127

3. El uso de **UG** en el renglón 4 es incorrecto, porque ν("x") ocurre libre en la hipótesis "$Fx \equiv Gy$" dentro de cuyo alcance se encuentra la premisa $\Phi\nu$("$Fx \equiv Gy$").

6. Aquí hay tres errores:

   a) el uso de **UG** en el renglón 5 es incorrecto, porque ν("z") no ocurre libre en $\Phi\nu$("$(\exists x)[(Fx \cdot Gz) \supset Hy]$") en todos los sitios en que μ("y") ocurre libre en $\Phi\mu$("$\exists x)[(Fx \cdot Gy) \supset Hy]$").

   b) el uso de **UG** en el renglón 5 es incorrecto, porque la variable ν ("z") ocurre libre en el renglón 2 dentro de cuyo alcance se encuentra $\Phi\nu$ ("$(\exists x)[(Fx \cdot Gz) \supset Hy]$").

   c) el uso de **UI** en el renglón 7 es incorrecto, porque ν ("x") no ocurre libre en $\Phi\nu$ ("$(\exists x)[(Fx \cdot Gx) \supset Hx]$") en todos los sitios en que μ ("y") ocurre libre en $\Phi\mu$ ("$(\exists x)[(Fx \cdot Gy) \supset Hy]$").

9. Aquí hay tres (o cuatro) errores:

   En el renglón 5 se pretende que el renglón 3, "$Fx \cdot Gy$" es una $\Phi\nu$ que corresponde a $\Phi\mu$("$Fx \cdot Gx$") del renglón 1. Esto es falso independientemente de que ν sea "x" o sea "y". Luego, en uno y en otro caso vemos que

   a) El uso de **EI** en el renglón 5 es incorrecto, porque ν ("x" o "y") no ocurre libre en $\Phi\nu$ ("$Fx \cdot Gy$") en todo sitio en que μ ("x") ocurre libre en $\Phi\mu$ ("$Fx \cdot Gx$").

   Si tomamos ν en $\Phi\nu$ ("$Fx \cdot Gy$") como "x", entonces notamos que

   b) El uso de **EI** en el renglón 5 es incorrecto, porque ν ("x") ocurre libre en p ("Fx"), estando el último renglón dentro del alcance de la hipótesis $\Phi\nu$ ("$Fx \cdot Gy$").

   En cualquier caso, hay dos errores más:

   c) el uso de **EI** en el renglón 8 es incorrecto, porque ν ("x") ocurre libre en el renglón 5 que precede a $\Phi\nu$ ("$\sim Fx \cdot Gx$").

   d) El uso de **EI** en el renglón 8 es incorrecto, porque ν ("x") ocurre libre en p ("$\sim Fx$"), estando el último renglón dentro del alcance de la hipótesis $\Phi\nu$ ("$\sim Fx \cdot Gx$").

Ejercicios de las Págs. 129-131

I. 1.

1. $(x)(Ax \supset Bx)$	$/\therefore (x)(Bx \supset Cx) \supset (Ak \supset Ck)$
→ 2. $(x)(Bx \supset Cx)$	
→ 3. Ak	
4. $Ak \supset Bk$	1, UI
5. Bk	4, 3, M.P.
6. $Bk \supset Ck$	2, UI
7. Ck	6, 5, M.P.
8. $Ak \supset Ck$	3–7, C.P.
9. $(x)(Bx \supset Cx) \supset (Ak \supset Ck)$	2–8, C.P.

5. 1. $(\exists x)Lx \supset (y)My \quad /\therefore (x)[Lx \supset (y)My]$
2. Lx
3. $(\exists x)Lx$ — 2, **EG**
4. $(y)My$ — 1, 3, M.P.
5. $Lx \supset (y)My$ — 2–4, C.P.
6. $(x)[Lx \supset (y)My]$ — 5, **UG**

10. 1. $(\exists x)Ax \supset (y)(By \supset Cy)$
2. $(\exists x)Dx \supset (\exists y)By \quad /\therefore (\exists x)(Ax \cdot Dx) \supset (\exists y)Cy$
3. $(\exists x)(Ax \cdot Dx)$
4. $Ax \cdot Dx$
5. Ax — 4, Simp.
6. $(\exists x)Ax$ — 5, **EG**
7. $(y)(By \supset Cy)$ — 1, 6, M.P.
8. Dx — 4, Simp.
9. $(\exists x)Dx$ — 8, **EG**
10. $(\exists y)By$ — 2, 9, M.P.
11. By
12. $By \supset Cy$ — 7, **UI**
13. Cy — 12, 11, M.P.
14. $(\exists y)Cy$ — 13, **EG**
15. $(\exists y)Cy$ — 10, 11–14, **EI**
16. $(\exists y)Cy$ — 3, 4–15, **EI**
17. $(\exists x)(Ax \cdot Dx) \supset (\exists y)Cy$ — 3–16, C.P.

15. 1. $(x)\{Ox \supset [(y)(Py \supset Qy) \supset Rx]\}$
2. $(x)\{Rx \supset [(y)(Py \supset Sy) \supset Tx]\} \quad /\therefore (y)[Py \supset (Qy \cdot Sy)] \supset (x)(Ox \supset Tx)$
3. $(y)[Py \supset (Qy \cdot Sy)]$
4. Ox
5. $Ox \supset [(y)(Py \supset Qy) \supset Rx]$ — 1, UI
6. $(y)(Py \supset Qy) \supset Rx$ — 5, 4, M.P.
7. $Py \supset (Qy \cdot Sy)$ — 3, UI
8. $(Py \supset Qy) \cdot (Py \supset Sy)$ — 7, Dist.
9. $Py \supset Qy$ — 8, Simp.
10. $(y)(Py \supset Qy)$ — 9, UG
11. Rx — 6, 10, M.P.
12. $Rx \supset [(y)(Py \supset Sy) \supset Tx]$ — 2, UI
13. $(y)(Py \supset Sy) \supset Tx$ — 12, 11, M.P.
14. $Py \supset Sy$ — 8, Simp.
15. $(y)(Py \supset Sy)$ — 14, UG
16. Tx — 13, 15, M.P.
17. $Ox \supset Tx$ — 4–16, C.P.
18. $(x)(Ox \supset Tx)$ — 17, UG
19. $(y)[Py \supset (Qy \cdot Sy)] \supset (x)(Ox \supset Tx)$ — 3–18, C.P.

II. 4.

1.	$(\exists x)Gx \supset (y)[Cy \supset Gy]$	
2.	$(\exists x)[Px \cdot Tx] \supset (y)[Gy \supset Ty]$	$/\therefore (\exists x)[Px \cdot (Tx \cdot Gx)] \supset (y)[Cy \supset Ty]$
3.	$(\exists x)[Px \cdot (Tx \cdot Gx)]$	
4.	$Pu \cdot (Tu \cdot Gu)$	
5.	Gu	4, Simp.
6.	$(\exists x)Gx$	5, **EG**
7.	$Pu \cdot Tu$	4, Simp.
8.	$(\exists x)[Px \cdot Tx]$	7, **EG**
9.	$(y)[Cy \supset Gy]$	1, 6, M.P.
10.	$(y)[Gy \supset Ty]$	2, 8, M.P.
11.	$Cw \supset Gw$	9, **UI**
12.	$Gw \supset Tw$	10, **UI**
13.	$Cw \supset Tw$	11, 12, H.S.
14.	$(y)[Cy \supset Ty]$	13, **UG**
15.	$(y)[Cy \supset Ty]$	3, 4–14, **EI**
16.	$(\exists x)[Px \cdot (Tx \cdot Gx)] \supset (y)[Cy \supset Ty]$	3–15, C.P.

8.

1.	$(x)[Rx \supset (Sx \vee Mx)]$	
2.	$(x)[(Ux \cdot Rx) \supset \sim Sx]$	$/\therefore (x)[Ux \supset Rx] \supset (y)[Uy \supset My]$
3.	$(x)[Ux \supset Rx]$	
4.	Uz	
5.	$Uz \supset Rz$	3, **UI**
6.	Rz	5, 4, M.P.
7.	$Uz \cdot Rz$	4, 6, Conj.
8.	$(Uz \cdot Rz) \supset \sim Sz$	2, **UI**
9.	$\sim Sz$	8, 7, M.P.
10.	$Rz \supset (Sz \vee Mz)$	1, **UI**
11.	$Sz \vee Mz$	10, 6, M.P.
12.	Mz	11, 9, D.S.
13.	$Uz \supset Mz$	4–12, C.P.
14.	$(y)[Uy \supset My]$	13, **UG**
15.	$(x)[Ux \supset Rx] \supset (y)[Uy \supset My]$	3–14, C.P.

12.

1.	$(x)\{Lx \supset [(y)(Py \supset Vy) \supset Mx]\}$	
2.	$(\exists z)(Pz \cdot Vz) \supset (y)(Py \supset Vy)$	$/\therefore (\exists x)Lx \supset [(\exists z)(Pz \cdot Vz) \supset (\exists y)My]$
3.	$(\exists x)Lx$	
4.	$(\exists z)(Pz \cdot Vz)$	
5.	$(y)(Py \supset Vy)$	2, 4, M.P.
6.	Lu	
7.	$Lu \supset [(y)(Py \supset Vy) \supset Mu]$	1, **UI**
8.	$(y)(Py \supset Vy) \supset Mu$	7, 6, M.P.
9.	Mu	8, 5, M.P.
10.	$(\exists y)My$	9, **EG**
11.	$(\exists y)My$	3, 6–10, **EI**
12.	$(\exists z)(Pz \cdot Vz) \supset (\exists y)My$	4–11, C.P.
13.	$(\exists x)Lx \supset [(\exists z)(Pz \cdot Vz) \supset (\exists y)My]$	3–12, C.P.

Ejercicios de la Pág. 139

4.

1.	$\sim(\exists x)(Fx \supset Gx)$	
2.	$(x)\sim(Fx \supset Gx)$	1, **QN**
3.	$\sim(Fy \supset Gy)$	2, **UI**
4.	$Fy \cdot \sim Gy$	3, Impl.
5.	Fy	4, Simp.
6.	$(\exists x)Fx$	5, **EG**
7.	$\sim Gy$	5, Simp.
8.	$(x)\sim Gx$	7, **UG**
9.	$\sim(\exists x)Gx$	8, **QN**
10.	$(\exists x)Fx \cdot \sim(\exists x)Gx$	6, 9, Conj.
11.	$\sim(\exists x)(Fx \supset Gx) \supset [(\exists x)Fx \cdot \sim(\exists x)Gx]$	1–10, C.P.
12.	$\sim[(\exists x)Fx \cdot \sim(\exists x)Gx] \supset (\exists x)(Fx \supset Gx)$	11, Trans., D.N.
13.	$[(\exists x)Fx \supset (\exists x)Gx] \supset (\exists x)(Fx \supset Gx)$	12, Impl.

8.

1.	$(\exists x)(Fx \vee Q)$	
2.	$Fx \vee Q$	
3.	$\sim Q$	
4.	Fx	2, 3, D.S.
5.	$(\exists x)Fx$	4, **EG**
6.	$\sim Q \supset (\exists x)Fx$	3–5, C.P.
7.	$Q \vee (\exists x)Fx$	6, Impl., D.N.
8.	$(\exists x)Fx \vee Q$	7, Com.
9.	$(\exists x)Fx \vee Q$	1, 2–8, **EI**
10.	$(\exists x)(Fx \vee Q) \supset [(\exists x)Fx \vee Q]$	1–9, C.P.

1.	$\sim(\exists x)(Fx \vee Q)$	
2.	$(x)\sim(Fx \vee Q)$	1, **QN**
3.	$\sim(Fx \vee Q)$	2, **UI**
4.	$\sim Fx \cdot \sim Q$	3, DeM.
5.	$\sim Fx$	4, Simp.
6.	$(x)\sim Fx$	5, **UG**
7.	$\sim(\exists x)Fx$	6, **QN**
8.	$\sim Q$	4, Simp.
9.	$\sim(\exists x)Fx \cdot \sim Q$	7, 8, Conj.
10.	$\sim[(\exists x)Fx \vee Q]$	9, De M.
11.	$\sim(\exists x)(Fx \vee Q) \supset \sim[(\exists x)Fx \vee Q]$	1–10, C.P.
12.	$[(\exists x)Fx \vee Q] \supset (\exists x)(Fx \vee Q)$	11, Trans.

12.

1.	$\sim(\exists x)(Fx \vee Gx)$	
2.	$(x)\sim(Fx \vee Gx)$	1, **QN**
3.	$\sim(Fx \vee Gx)$	2, **UI**
4.	$\sim Fx \cdot \sim Gx$	3, De M.
5.	$\sim Fx$	4, Simp.
6.	$\sim Gx$	4, Simp.
7.	$(x)\sim Fx$	5, **UG**
8.	$(x)\sim Gx$	6, **UG**
9.	$(x)\sim Fx \cdot (x)\sim Gx$	7, 8, Conj.
10.	$\sim(\exists x)Fx \cdot \sim(\exists x)Gx$	9, **QN**
11.	$\sim[(\exists x)Fx \vee (\exists x)Gx]$	10, De M.
12.	$\sim(\exists x)(Fx \vee Gx) \supset \sim[(\exists x)Fx \vee (\exists x)Gx]$	1–11, C.P.
13.	$[(\exists x)Fx \vee (\exists x)Gx] \supset (\exists x)(Fx \vee Gx)$	12, Trans.

14. $(\exists x)(Fx \vee Gx)$	
15. $Fy \vee Gy$	
16. $\sim(\exists x)Fx$	
17. $(x)\sim Fx$	16, **QN**
18. $\sim Fy$	17, **UI**
19. Gy	15, 18, D.S.
20. $(\exists x)Gx$	19, **EG**
21. $\sim(\exists x)Fx \supset (\exists x)Gx$	16–20, C.P.
22. $(\exists x)Fx \vee (\exists x)Gx$	21, Impl., D.N.
23. $(\exists x)Fx \vee (\exists x)Gx$	14, 15–22, **EI**
24. $(\exists x)(Fx \vee Gx) \supset [(\exists x)Fx \vee (\exists x)Gx]$	14–23, C.P.
25. $\{13\} \cdot \{24\}$	13, 24, Conj.
26. $[(\exists x)Fx \vee (\exists x)Gx] \equiv (\exists x)(Fx \vee Gx)$	25, Equiv.

Ejercicios de las Págs. 152-155

I. **1.** Todo perro tiene su día.
5. Todas las cosas le llegan al que espera.
10. Una persona es juzgada por sus compañías.
15. Viento malo es el que a nadie trae algo bueno.
20. Nadie pide prestado todo a todos.

II. **1.** $(x)[(Dx \cdot Mx) \supset (y)(Ty \supset \sim Txy)]$
5. $(x)[Rx \supset (\exists y)(Ty \cdot Hxy)]$
10. $(x)\{Px \supset [(\exists y)Axy \supset (z)(Pz \supset Ezx)]\}$
15. $(x)\{Px \supset \{(\exists y)\{Dy \cdot Hxy \cdot (z)[(Pz \cdot Vzx) \supset Byz]\} \supset (\exists u)(Nu \cdot Mxu)]\}\}$
20. $(\exists x)\{Sx \cdot (y)[Py \supset (\exists z)Byzx]\}$
25. $(x)\{Sx \supset (y)\{Py \supset (\exists z)[(\exists w)Bwzx \cdot \sim Byzx]\}\}$
30. $(x)\{Px \supset (y)[Cy \supset (\exists z)(Bzx \cdot \sim Dxzy)]\}$
35. $(x)\{Cx \supset (y)[(\exists u)(\exists v)Dyuv \supset (\exists z)(\exists w)(Dyzw \cdot \sim Dyzx)]\}$
40. $(\exists x)\{Px \cdot (\exists y)\{Cy \cdot (z)[(\exists u)Dxzu \supset Dxzy]\}\}$

III. **1.** $(x)\{\{Px \cdot (\exists y)[My \cdot (\exists z)(Bz \cdot Bzy \cdot Sxz)]\} \supset$
$(\exists u)[Mu \cdot (\exists v)(Bv \cdot Bvx \cdot Suv)]\}$
5. $(x)\{\{Mx \cdot (y)[(Ry \cdot Byx) \supset Sxy]\} \supset$
$(z)[(Mz \cdot Pxz) \supset Hxz]\}$

Ejercicios de las Págs. 158-160

I. 1.

1. $(\exists x)(y)[(\exists z)Ayz \supset Ayx]$	
2. $(y)(\exists z)Ayz$	$/\therefore (\exists x)(y)Ayx$
3. $(y)[(\exists z)Ayz \supset Ayx]$	
4. $(\exists z)Ayz \supset Ayx$	3, **UI**
5. $(\exists z)Ayz$	2, **UI**
6. Ayx	4, 5, M.P.
7. $(y)Ayx$	6, **UG**
8. $(\exists x)(y)Ayx$	7, **EG**
9. $(\exists x)(y)Ayx$	1, 3–8, **EI**

5.

1. $(\exists x)[Hx \cdot (y)(Iy \supset Jxy)]$ $\quad /\therefore (x)(Hx \supset Ix) \supset (\exists y)(Iy \cdot Jyy)$
2. $(x)(Hx \supset Ix)$
3. $Hx \cdot (y)(Iy \supset Jxy)$
4. Hx — 3, Simp.
5. $Hx \supset Ix$ — 2, **UI**
6. Ix — 5, 4, M.P.
7. $(y)(Iy \supset Jxy)$ — 3, Simp.
8. $Ix \supset Jxx$ — 7, **UI**
9. Jxx — 8, 6, M.P.
10. $Ix \cdot Jxx$ — 6, 9, Conj.
11. $(\exists y)(Iy \cdot Jyy)$ — 10, **EG**
12. $(\exists y)(Iy \cdot Jyy)$ — 1, 3–11, **EI**
13. $(x)(Hx \supset Ix) \supset (\exists y)(Iy \cdot Jyy)$ — 2–12, C.P.

II. 4.

1. $(x)\{(\exists y)(Byb \cdot Lxyb) \supset Fx\}$
2. $(\exists x)(Cxb \cdot Lxab)$ $\quad /\therefore (x)(Cxb \supset \sim Fx) \supset \sim Bab$
3. $(x)(Cxb \supset \sim Fx)$
4. $Cxb \cdot Lxab$
5. $Cxb \supset \sim Fx$ — 3, **UI**
6. Cxb — 4, Simp.
7. $\sim Fx$ — 5, 6, M.P.
8. $(\exists y)(Byb \cdot Lxyb) \supset Fx$ — 1, **UI**
9. $\sim(\exists y)(Byb \cdot Lxyb)$ — 8, 7, M.T.
10. $(y)(\sim Byb \vee \sim Lxyb)$ — 9, **QN**, De M.
11. $\sim Bab \vee \sim Lxab$ — 10, **UI**
12. $Lxab$ — 4, Simp.
13. $\sim Bab$ — 11, 12, Com., D.N., D.S.
14. $\sim Bab$ — 2, 4–13, **EI**
15. $3 \supset 14$ — 3–14, C.P.

6.

1. $(x)\{(\exists y)[(\exists z)(Gz \cdot \sim Rz \cdot Sxzy)] \supset Cx\}$
2. $(z)[(Wz \cdot Orz) \supset (Slzr \vee Smzr)]$ $\quad /\therefore (\exists z)(Wz \cdot Orz \cdot Gz \cdot \sim Rz) \supset [(u)(\sim Smur) \supset Cl]$
3. $(\exists z)(Wz \cdot Orz \cdot Gz \cdot \sim Rz)$
4. $(u)(\sim Smur)$
5. $Wz \cdot Orz \cdot Gz \cdot \sim Rz$
6. $Wz \cdot Orz$ — 5, Simp.
7. $(Wz \cdot Orz) \supset (Slzr \vee Smzr)$ — 2, **UI**
8. $Slzr \vee Smzr$ — 7, 6, M.P.
9. $\sim Smzr$ — 4, **UI**
10. $Slzr$ — 8, 9, Com., D.S.
11. $Gz \cdot \sim Rz$ — 5, Simp.
12. $Gz \cdot \sim Rz \cdot Slzr$ — 11, 10, Conj.
13. $(\exists z)(Gz \cdot \sim Rz \cdot Slzr)$ — 12, **EG**
14. $(\exists y)[(\exists z)(Gz \cdot \sim Rz \cdot Slzy)]$ — 13, **EG**
15. $(\exists y)[(\exists z)(Gz \cdot \sim Rz \cdot Slzy)] \supset Cl$ — 1, **UI**
16. Cl — 15, 14, M.P.
17. Cl — 3, 5–16, **EI**
18. $4 \supset 17$ — 4–17, C.P.
19. $3 \supset [18]$ — 3–18, C.P.

9.

1.	$(x)[(Px\cdot{\sim}Rxx) \supset (y)(Py \supset {\sim} Ryx)]$	
2.	$(y)\{Py \supset (x)[(Px\cdot{\sim}Ryx) \supset {\sim}Hyx]\}$	$/\therefore (x)\{[Px\cdot(z)(Pz \supset {\sim}Rxz)] \supset (y)(Py \supset {\sim}Hyx)\}$
→ 3.	$Px\cdot(z)(Pz \supset {\sim}Rxz)$	
→ 4.	Py	
5.	$(z)(Pz \supset {\sim}Rxz)$	3, Simp.
6.	$Px \supset {\sim}Rxx$	5, **UI**
7.	Px	3, Simp.
8.	${\sim}Rxx$	6, 7, M.P.
9.	$Px\cdot{\sim}Rxx$	7, 8, Conj.
10.	$(Px\cdot{\sim}Rxx) \supset (y)(Py \supset {\sim}Ryx)$	1, **UI**
11.	$(y)(Py \supset {\sim}Ryx)$	10, 9, M.P.
12.	$Py \supset {\sim}Ryx$	11, **UI**
13.	${\sim}Ryx$	12, 4, M.P.
14.	$Px\cdot{\sim}Ryx$	7, 13, Conj.
15.	$Py \supset (x)[(Px\cdot{\sim}Ryx) \supset {\sim}Hyx]$	2, **UI**
16.	$(x)[(Px\cdot{\sim}Ryx) \supset {\sim}Hyx]$	15, 4, M.P.
17.	$(Px\cdot{\sim}Ryx) \supset {\sim}Hyx$	16, **UI**
18.	${\sim}Hyx$	17, 14, M.P.
19.	$4 \supset 18$	4–18, C.P.
20.	$(y)(19)$	19, **UG**
21.	$3 \supset 20$	3–20, C.P.
22.	$(x)\{21\}$	21, **UG**

Ejercicios de la Pág. 166

3.

1.	$(x)[Fx \supset (y)(Sy \supset Oxy)]$	$/\therefore (y)[Sy \supset (x)(Fx \supset {\sim}Oyx)]$
2.	$(x)(y)(Oxy \supset {\sim}Oyx)$	**(premisas auxiliares)**
→ 3.	Sy	
→ 4.	Fx	
5.	$Fx \supset (y)(Sy \supset Oxy)$	1, **UI**
6.	$(y)(Sy \supset Oxy)$	5, 4, M.P.
7.	$Sy \supset Oxy$	6, **UI**
8.	Oxy	7, 3, M.P.
9.	$(y)(Oxy \supset {\sim}Oyx)$	2, **UI**
10.	$Oxy \supset {\sim}Oyx$	9, **UI**
11.	${\sim}Oyx$	10, 8, M.P.
12.	$Fx \supset {\sim}Oyx$	4–11, C.P.
13.	$(x)(Fx \supset {\sim}Oyx)$	12, **UG**
14.	$Sy \supset (x)(Fx \supset {\sim}Oyx)$	3–13, C.P.
15.	$(y)[Sy \supset (x)(Fx \supset {\sim}Oyx)]$	14, **UG**

5.

1.	$(x)\{\{Px\cdot(\exists y)[Py\cdot(\exists z)(Cz\cdot Cyz)\cdot Nxy]\} \supset Ux\}$	$/\therefore (x)\{[Px\cdot(\exists z)(Bz\cdot Cxz)] \supset Ux\}$
2.	$(z)(Bz \supset Cz)$	**(premisas auxiliares)**
3.	$(x)(Nxx)$	
4.	$Px\cdot(\exists z)(Bz\cdot Cxz)$	
5.	$(\exists z)(Bz\cdot Cxz)$	4, Simp.
6.	$Bz\cdot Cxz$	
7.	Bz	6, Simp.
8.	$Bz \supset Cz$	2, **UI**
9.	Cz	8, 7, M.P.
10.	Cxz	6, Simp.
11.	$Cz\cdot Cxz$	9, 10, Conj.
12.	$(\exists z)(Cz\cdot Cxz)$	11, **EG**
13.	Px	4, Simp.
14.	Nxx	3, **UI**
15.	$Px\cdot(\exists z)(Cz\cdot Cxz)\cdot Nxx$	13, 12, 14, Conj.
16.	$(\exists y)[Py\cdot(\exists z)(Cz\cdot Cyz)\cdot Nxy]$	15, **EG**
17.	$Px\cdot(\exists y)[Py\cdot(\exists z)(Cz\cdot Cyz)\cdot Nxy]$	13, 16, Conj.
18.	$\{Px\cdot(\exists y)[Py\cdot(\exists z)(Cz\cdot Cyz)\cdot Nxy]\} \supset Ux$	1, **UI**
19.	Ux	18, 17, M.P.
20.	Ux	5, 6–19, **EI**
21.	$[Px\cdot(\exists z)(Bz\cdot Cxz)] \supset Ux$	4–20, C.P.
22.	$(x)\{[Px\cdot(\exists z)(Bz\cdot Cxz)] \supset Ux\}$	21, **UG**

7.

1.	$(x)[Vx \supset (y)(Oyx \supset \sim Ixy)]$	
2.	$(y)(x)[(Rx\cdot Oyx) \supset Tyx]$	$/\therefore (y)[(\exists x)(Vx\cdot Oyx) \supset (\exists x)(Tyx\cdot \sim Ixy)]$
3.	$(x)(Vx \supset Rx)$ **(premisa auxiliar)**	
4.	$(\exists x)(Vx\cdot Oyx)$	
5.	$Vx\cdot Oyx$	
6.	Vx	5, Simp.
7.	$Vx \supset Rx$	3, **UI**
8.	Rx	7, 6, M.P.
9.	Oyx	5, Simp.
10.	$Rx\cdot Oyx$	8, 9, Conj.
11.	$(x)[(Rx\cdot Oyx) \supset Tyx]$	2, **UI**
12.	$(Rx\cdot Oyx) \supset Tyx$	11, **UI**
13.	Tyx	12, 10, M.P.
14.	$Vx \supset (y)(Oyx \supset \sim Ixy)$	1, **UI**
15.	$(y)(Oyx \supset \sim Ixy)$	14, 6, M.P.
16.	$Oyx \supset \sim Ixy$	15, **UI**
17.	$\sim Ixy$	16, 9, M.P.
18.	$Tyx\cdot \sim Ixy$	17, 13, Conj.
19.	$(\exists x)(Tyx\cdot \sim Ixy)$	18, **EG**
20.	$(\exists x)(Tyx\cdot \sim Ixy)$	4, 5–19, **EI**
21.	$(\exists x)(Vx\cdot Oyx) \supset (\exists x)(Tyx\cdot \sim Ixy)$	4–20, C.P.
22.	$(y)[(\exists x)(Vx\cdot Oyx) \supset (\exists x)(Tyx\cdot \sim Ixy)]$	21, **UG**

Ejercicios de las Págs. 176-177

2.

	1. $(\exists x)\{Px \cdot Sx \cdot (y)[(Py \cdot Sy) \supset x = y] \cdot Lx\}$	$/\therefore (x)[(Px \cdot Sx) \supset Lx]$
→	2. $Pz \cdot Sz$	
→	3. $Px \cdot Sx \cdot (y)[(Py \cdot Sy) \supset x = y] \cdot Lx$	
	4. $(y)[(Py \cdot Sy) \supset x = y]$	3, Simp.
	5. $(Pz \cdot Sz) \supset x = z$	4, **UI**
	6. $x = z$	5, 2, M.P.
	7. Lx	3, Simp.
	8. Lz	6, 7, Id.
	9. Lz	1, 3–8, **EI**
	10. $(Pz \cdot Sz) \supset Lz$	2–9, C.P.
	11. $(x)[(Px \cdot Sx) \supset Lx]$	10, **UG**

4.

	1. $(\exists x)\{Px \cdot (y)[(Py \cdot x \neq y) \supset Fxy] \cdot Sx\}$	$/\therefore (y)[(Py \cdot \sim Sy) \supset (\exists x)(Px \cdot Fxy)]$
→	2. $Py \cdot \sim Sy$	
→	3. $Px \cdot (y)[(Py \cdot x \neq y) \supset Fxy] \cdot Sx$	
	4. Sx	3, Simp.
	5. $\sim Sy$	2, Simp.
	6. $x \neq y$	4, 5, Id.
	7. Py	2, Simp.
	8. $Py \cdot x \neq y$	7, 6, Conj.
	9. $(y)[(Py \cdot x \neq y) \supset Fxy]$	3, Simp.
	10. $(Py \cdot x \neq y) \supset Fxy$	9, **UI**
	11. Fxy	10, 8, M.P.
	12. Px	3, Simp.
	13. $Px \cdot Fxy$	12, 11, Conj.
	14. $(\exists x)(Px \cdot Fxy)$	13, **EG**
	15. $(\exists x)(Px \cdot Fxy)$	1, 3–14, **EI**
	16. $(Py \cdot \sim Sy) \supset (\exists x)(Px \cdot Fxy)$	2–15, C.P.
	17. $(y)[(Py \cdot \sim Sy) \supset (\exists x)(Px \cdot Fxy)]$	16, **UG**

6.

	1. $(x)\{Fx \supset (y)[(Fy \cdot Lxy) \supset Sxy]\}$	
	$/\therefore (\exists x)\{Fx \cdot (y)[(Fy \cdot x \neq y) \supset Lxy]\} \supset (\exists x)\{Fx \cdot (y)[(Fy \cdot x \neq y) \supset Sxy]\}$	
→	2. $(\exists x)\{Fx \cdot (y)[(Fy \cdot x \neq y) \supset Lxy]\}$	
→	3. $Fx \cdot (y)[(Fy \cdot x \neq y) \supset Lxy]$	
	4. Fx	3, Simp.
	5. $(y)[(Fy \cdot x \neq y) \supset Lxy]$	3, Simp.
	6. $Fx \supset (y)[(Fy \cdot Lxy) \supset Sxy]$	1, **UI**
	7. $(y)[(Fy \cdot Lxy) \supset Sxy]$	6, 4, M.P.
	8. $(Fy \cdot Lxy) \supset Sxy$	7, **UI**
	9. $(Fy \cdot x \neq y) \supset Lxy$	5, **UI**
	10. $Lxy \supset (Fy \supset Sxy)$	8, Com., Exp.
	11. $(Fy \cdot x \neq y) \supset (Fy \supset Sxy)$	9, 10, H.S.
	12. $(Fy \cdot x \neq y \cdot Fy) \supset Sxy$	11, Exp.
	13. $(Fy \cdot x \neq y) \supset Sxy$	12, Com., Taut.
	14. $(y)[(Fy \cdot x \neq y) \supset Sxy]$	13, **UG**
	15. $Fx \cdot (y)[(Fy \cdot x \neq y) \supset Sxy]$	4, 14, Conj.
	16. $(\exists x)\{Fx \cdot (y)[(Fy \cdot x \neq y) \supset Sxy]\}$	15, **EG**
	17. $(\exists x)\{Fx \cdot (y)[(Fy \cdot x \neq y) \supset Sxy]\}$	2, 3–16, **EI**
	18. $2 \supset 17$	2–17, C.P.

Ejercicios de las Págs. 182-183

I. **3.** $(x)(y)[x \neq y \supset (\exists F)(Fx \cdot \sim Fy)]$

6. $(\exists x)\{Fxd \cdot (y)(Fyd \supset x = y) \cdot (G)[(Gx \cdot \mathbf{F}G) \supset Gd] \cdot (H)[(Hx \cdot \mathbf{V}H) \supset \sim Hd]\}$

9. $(x)\{[Mx \cdot (F)(\mathbf{V}F \supset Fx)] \supset Vx\} \cdot (\exists x)[Mx \cdot Vx \cdot (\exists F)(\mathbf{V}F \cdot \sim Fx)]$

II. **2.**

1. $(\exists x)(\exists F)Fx$	
2. $(\exists F)Fx$	
3. Fx	
4. $(\exists x)Fx$	3, **EG**
5. $(\exists F)(\exists x)Fx$	4, **EG**
6. $(\exists F)(\exists x)Fx$	2, 3–5, **EI**
7. $(\exists F)(\exists x)Fx$	1, 2–6, **EI**
8. $1 \supset 7$	1–7, C.P.

1. $(\exists F)(\exists x)Fx$	
2. $(\exists x)Fx$	
3. Fx	
4. $(\exists F)Fx$	3, **EG**
5. $(\exists x)(\exists F)Fx$	4, **EG**
6. $(\exists x)(\exists F)Fx$	2, 3–5, **EI**
7. $(\exists x)(\exists F)Fx$	1, 2–6, **EI**
8. $1 \supset 7$	1–7, C.P.

6.

1. $(x)(y)(z)[(Rxy \cdot Ryz) \supset Rxz] \cdot (x) \sim Rxx$	
2. $(x)(y)(z)[(Rxy \cdot Ryz) \supset Rxz]$	1, Simp.
3. $(y)(z)[(Rxy \cdot Ryz) \supset Rxz]$	2, **UI**
4. $(z)[(Rxy \cdot Ryz) \supset Rxz]$	3, **UI**
5. $(Rxy \cdot Ryx) \supset Rxx$	4, **UI**
6. $(x) \sim Rxx$	1, Simp.
7. $\sim Rxx$	6, **UI**
8. $\sim(Rxy \cdot Ryx)$	5, 7, M.T.
9. $\sim Rxy \vee \sim Ryx$	8, De M.
10. $Rxy \supset \sim Ryx$	9, Impl.
11. $(y)(Rxy \supset \sim Ryx)$	10, **UG**
12. $(x)(y)(Rxy \supset \sim Ryx)$	11, **UG**
13. $\{1\} \supset 12$	1–12, C.P.
14. $(R)\{13\}$	13, **UG**

10.

1. $(x)(y)[(x = y) \equiv (F)(Fx \equiv Fy)]$	$/ \therefore (x)(x = x)$
2. Fx	
3. $\sim\sim Fx$	2, D.N.
4. Fx	3, D.N.
5. $Fx \supset Fx$	2–4, C.P.
6. $(Fx \supset Fx) \cdot (Fx \supset Fx)$	5, Taut.
7. $Fx \equiv Fx$	6, Equiv.
8. $(F)(Fx \equiv Fx)$	7, **UG**
9. $(y)[(x = y) \equiv (F)(Fx \equiv Fy)]$	1, **UI**
10. $(x = x) \equiv (F)(Fx \equiv Fx)$	9, **UI**
11. $[(x = x) \supset (F)(Fx \equiv Fx)] \cdot [(F)(Fx \equiv Fx) \supset (x = x)]$	10, Equiv.
12. $(F)(Fx \equiv Fx) \supset (x = x)$	11, Simp.
13. $x = x$	12, 8, M.P.
14. $(x)(x = x)$	13, **UG**

Ejercicios de las Págs. 208-209

5. Not a *wff*. **10.** *wff*.

Ejercicios de la Pág. 211

5. $\sim((P)\cdot(\sim(\sim((Q)\cdot(\sim(P))))))$
10. $(\sim((\sim((P)\cdot(\sim(\sim(P)))))\cdot(\sim(\sim(P)))))\cdot(\sim((\sim(P))\cdot(\sim(\sim((P)\cdot(\sim(\sim(P))))))))$

Ejercicios de las Págs. 213-214

1. $f_2(P, Q)$ se expresa como $\sim(P\cdot\sim Q)$
   $f_5(P, Q)$ se expresa como $\sim(P\cdot Q)\cdot\sim(P\cdot\sim Q)$
   $f_{11}(P, Q)$ se expresa como $\sim(P\cdot Q)\cdot\sim(P\cdot\sim Q)\cdot\sim(\sim P\cdot Q)$

Ejercicios de la Pág. 217

1. $S(\mathrm{v}, \sim)$ es funcionalmente completo, pues contiene el mismo "$\sim$" que contiene R.S. y el "$\cdot$" de R.S. es definible en $S(\mathrm{v}, \sim)$ como $\mathrm{P}\cdot\mathrm{Q} =$ df $\sim(\sim\mathrm{P}\ \mathrm{v} \sim\mathrm{Q})$. Luego, cualquier función de verdad expresable en R.S. es expresable en $S(v, \sim)$, cuya integridad funcional se sigue ahora de la de R.S.
2. $S(\supset, \cdot)$ es funcionalmente incompleto, pues no contiene *wff* que pueda expresar una función de verdad cuyo valor sea *falso* cuando todos sus argumentos tengan el valor *verdadero*. La prueba es por inducción fuerte sobre el número de símbolos en la *wff* $g(P, Q, R, \ldots)$ de $S(\supset, \cdot)$
   α) Si $g(P, Q, R, \ldots)$ contiene solamente un símbolo es o P o Q o R o ... Si todos éstos son *verdaderos*, entonces $g(P, Q, R, \ldots)$ no puede tener el valor de verdad *falso*.
   β) Suponer que cualquier *wff* que contenga $< m$ símbolos no puede tener el valor *falso* cuando todos sus argumentos son *verdaderos*. Ahora, considerar cualquier *wff* $g(P, Q, R, \ldots)$ que exactamente contenga m símbolos $(m > 1)$. Debe ser o $g_1(P, Q, R, \ldots) \supset g_2(P, Q, R, \ldots)$ o $g_1(P, Q, R, \ldots)\cdot g_2(P, Q, R, \ldots)$. Pero $g_1(P, Q, R, \ldots)$ y $g_2(P, Q, R, \ldots)$ contiene cada una $< m$ símbolos, luego deben tener el valor *verdadero* si todos sus argumentos tienen el valor *verdadero*. Y dado que $\mathbf{T} \supset \mathbf{T}$ y $\mathbf{T}\cdot\mathbf{T}$ son ambas $\mathbf{T}$, $g(P, Q, R, \ldots)$ no puede tener valor *falso* cuando todos sus argumentos tienen el valor *verdadero*. Luego, ninguna *wff* de $S(\supset, \cdot)$ puede tener valor *falso* cuando todos sus argumentos tienen valor *verdadero*, luego $S(\supset, \cdot)$ es funcionalmente incompleto.
6. $S(\supset, +)$ es funcionalmente completo, pues el "$\sim$" de R.S. es definible en $S(\supset, +)$ como $\sim\mathrm{P} =$ df $\mathrm{P} + (\mathrm{P} \supset \mathrm{P})$, y el "$\cdot$" de R.S. es entonces definible en $S(\supset, +)$ como $\mathrm{P}\cdot\mathrm{Q} =$ df $\sim[\mathrm{P} \supset (\mathrm{P} + \mathrm{Q})]$. Luego, cualquier función de verdad expresable en R.S. es expresable en $S(\supset, +)$ cuya integridad funcional se sigue ahora de la R.S.

Ejercicios de las Págs. 229-230

1. Los mismos modelos que establecen la independencia de los postulados de H.A. en las Págs. 213-215 sirven para establecer la independencia de los axiomas de $\mathrm{P_N}$.

Ejercicios de las Págs. 236-237

Teo. 6. $\vdash (R\sim\sim P) \supset (PR)$

Prueba:	$\vdash \sim\sim P \supset P$	Teo. 2
	$\vdash (R\sim\sim P) \supset (PR)$	DR 3

DR 6. $P \supset Q, Q \supset R \vdash P \supset R$

***Prueba*:**	$P \supset P$	**Teo.** 7
	$P \supset Q$	pr.
	$Q \supset R$	pr.
	$P \supset R$	DR 5

Teo. 10. $\vdash (PQ)R \supset P(QR)$

***Prueba*:**	$\vdash (PQ)R \supset PQ$	Ax. 2
	$\vdash PQ \supset P$	Ax. 2
	$\vdash (PQ)R \supset P$	DR 6
	$\vdash PQ \supset QP$	**Teo.** 8
	$\vdash QP \supset Q$	**Ax.** 2
	$\vdash PQ \supset Q$	DR 6
	$\vdash (PQ)R \supset QR$	DR 7, Cor. 1
	$\vdash (PQ)R \supset P(QR)$	DR 8

DR 10. $P \supset R, Q \supset R \vdash (P \vee Q) \supset R$

***Prueba*:**	$P \supset R$	pr.
	$Q \supset R$	pr.
	$(P \vee Q) \supset (R \vee R)$	DR 9
	$\sim R \supset \sim R \sim R$	**Ax.** 1
	$[\sim R \supset \sim R \sim R] \supset [\sim(\sim R \sim R) \supset \sim\sim R]$	**Teo.** 5
	$\sim(\sim R \sim R) \supset \sim\sim R$	R 1
	$(R \vee R) \supset \sim\sim R$	df.
	$\sim\sim R \supset R$	**Teo.** 2
	$(P \vee Q) \supset R$	DR 5

Teo. 14. $\vdash [PQ \supset R] \supset [P \supset (Q \supset R)]$

***Prueba*:**	$\vdash \sim\sim(Q \sim R) \supset (Q \sim R)$	**Teo.** 2
	$\vdash P \sim\sim(Q \sim R) \supset P(Q \sim R)$	DR 7, Cor. 2
	$\vdash P(Q \sim R) \supset (PQ) \sim R$	**Teo.** 10, Cor.
	$\vdash P \sim\sim(Q \sim R) \supset (PQ) \sim R$	DR 6
	$\vdash \{P \sim\sim(Q \sim R) \supset (PQ) \sim R\} \supset$ $\{\sim[(PQ) \sim R] \supset \sim[P \sim\sim(Q \sim R)]\}$	**Teo.** 5
	$\vdash \sim[(PQ) \sim R] \supset \sim[P \sim\sim(Q \sim R)]$	R 1
	$\vdash [PQ \supset R] \supset [P \supset (Q \supset R)]$	df.

Ejercicios de la Pág. 241

Teo. 17, Cor. $\vdash P \supset (P \vee Q)$

***Prueba*:**	$\vdash P \supset (Q \vee P)$	**Teo.** 17
	$\vdash (Q \vee P) \supset (P \vee Q)$	**Teo.** 11
	$\vdash P \supset (P \vee Q)$	DR 6

DR 14. $P, Q \vdash PQ$

Prueba:	$P \supset (Q \supset PQ)$	**Teo.** 15
	P	pr.
	$Q \supset (PQ)$	R 1
	Q	pr.
	PQ	R 1

Ejercicios de las Págs. 243-244

DR 20. $(P \supset Q) \cdot (R \supset S), P \vee R \vdash Q \vee S$

Prueba:	$(P \supset Q) \cdot (R \supset S)$	pr.
	$P \supset Q$	DR 19
	$R \supset S$	DR 19, Cor.
	$(P \vee R) \supset (Q \vee S)$	DR 9
	$P \vee R$	pr.
	$Q \vee S$	R 1

Teo. 30. $\vdash P(Q \vee R) \equiv PQ \vee PR$

Prueba:	$\vdash PQ \supset P$	Ax. 2
	$\vdash PR \supset P$	Ax. 2
	$\vdash (PQ \vee PR) \supset P$	DR 10
	$\vdash PQ \supset QP$	**Teo.** 8
	$\vdash QP \supset Q$	Ax. 2
	$\vdash PQ \supset Q$	DR 6
	$\vdash PR \supset RP$	**Teo.** 8
	$\vdash RP \supset R$	Ax. 2
	$\vdash PR \supset R$	DR 6
	$\vdash (PQ \vee PR) \supset (Q \vee R)$	DR 9
	$\vdash (PQ \vee PR) \supset P(Q \vee R)$	DR 8
	$\vdash P(Q \vee R) \supset (Q \vee R)P$	**Teo.** 8
	$\vdash (Q \vee R)P \supset QP \vee RP$	**Teo.** 18
	$\vdash P(Q \vee R) \supset QP \vee RP$	DR 6
	$\vdash QP \equiv PQ$	**Teo.** 21
	$\vdash P(Q \vee R) \supset PQ \vee RP$	MT IV, Cor.
	$\vdash RP \equiv PR$	**Teo.** 21
	$\vdash P(Q \vee R) \supset PQ \vee PR$	MT IV, Cor.
	$\vdash P(Q \vee R) \equiv PQ \vee PR$	DR 14, df.

Ejercicios de la Pág. 273

Se ha probado ya que el sistema de H. A. es un sistema modelo de la lógica. Como P_N tiene los mismos símbolos primitivos que H.A. es, también, funcionalmente completo. La analiticidad de P_N se muestra usando tablas de verdad que muestran que sus cuatro axiomas son tautologías, y entonces mostrando que cualquier *wff* que se sigue de las tautologías por aplicaciones repetidas de la regla de P_N debe también ser una tautología. Dado que sus Axiomas 1, 2 y 4 son los mismos que los Postulados 1, 2 y 4 de H. A. y dado que su regla es la misma regla R'1 de H. A. y porque los primitivos de los dos sistemas son los mismos, podemos probar la integridad deductiva de P_N derivando P Φ 3 de H. A. a partir de los cuatro axiomas de P_N. Primero, estableceremos una regla derivada para P_N:

DR 1. $P \supset Q, Q \supset R \vdash_{P_N} P \supset R$

Demostración:	1. $(Q \supset R) \supset [(\sim P \vee Q) \supset (\sim P \vee R)]$	Ax 4
	2. $Q \supset R$	premisa
	3. $(\sim P \vee Q) \supset (\sim P \vee R)$	Regla
	4. $(P \supset Q) \supset (P \supset R)$	df.
	5. $P \supset Q$	premisa
	6. $P \supset R$	Regla

TEO. 1. $\vdash_{P_N} (P \vee Q) \supset (Q \vee P)$

Prueba:	1. $[Q \supset (Q \vee P)] \supset \{(P \vee Q) \supset [P \vee (Q \vee P)]\}$	Ax. 4
	2. $Q \supset (Q \vee P)$	Ax. 2
	3. $(P \vee Q) \supset [P \vee (Q \vee P)]$	Regla
	4. $[P \vee (Q \vee P)] \supset [Q \vee (P \vee P)]$	Ax. 3
	5. $(P \vee Q) \supset [Q \vee (P \vee P)]$	DR 1
	6. $[(P \vee P) \supset P] \supset \{[Q \vee (P \vee P)] \supset (Q \vee P)\}$	Ax. 4
	7. $(P \vee P) \supset P$	Ax. 1
	8. $[Q \vee (P \vee P)] \supset (Q \vee P)$	Regla
	9. $(P \vee Q) \supset (Q \vee P)$	DR 1

Ejercicios de la Pág. 277

1. 1. *CAppp*
   2. *CpApq*
   3. *CApqAqp*
   4. *CCpqCArpArq*

Ejercicios de la Pág. 279

2. P↓P:↓:P↓P.↓.P↓P:.↓:.P↓P:↓:P↓P.↓.P↓P
6. P|Q.|.P|Q:|:P|P
8. P↓P:↓:P↓P.↓.P↓P:.↓:.P↓P:↓:P↓P.↓.P↓P

Ejercicios de la Pág. 300

Teo. 4. $\vdash (x)(P \supset Q) \supset [(\exists x)P \supset (\exists x)Q]$

Prueba:	$(x)(P \supset Q) \vdash (x)(P \supset Q) \supset (P \supset Q)$	P 5
	$(x)(P \supset Q) \vdash (x)(P \supset Q)$	premisa
	$(x)(P \supset Q) \vdash P \supset Q$	R 1
	$(x)(P \supset Q) \vdash \sim Q \supset \sim P$	Ⓟ
	$(x)(P \supset Q) \vdash (x)(\sim Q \supset \sim P)$	R 2
	$(x)(P \supset Q) \vdash (x)\sim Q \supset (x)\sim P$	DR 5
	$(x)(P \supset Q) \vdash \sim(x)\sim P \supset \sim(x)\sim Q$	Ⓟ
	$(x)(P \supset Q) \vdash (\exists x)P \supset (\exists x)Q$	df.
	$(x)(P \supset Q) \supset [(\exists x)P \supset (\exists x)Q]$	D.T.

Ejercicios de las Págs. 305-306

Teo. 13. $\vdash (\exists x)(P \cdot Q) \supset (\exists x)P \cdot (\exists x)Q$

Prueba:	$\vdash [(x)\sim P \vee (x)\sim Q] \supset (x)(\sim P \vee \sim Q)$	**Teo.** 10
	$\vdash \sim(x)(\sim P \vee \sim Q) \supset \sim[(x)\sim P \vee (x)\sim Q]$	Ⓟ
	$\vdash \sim(x)\sim(P \cdot Q) \supset [\sim(x)\sim P \cdot \sim(x)\sim Q]$	**Dualidad**
		Teorema, Ⓟ, **y** R.R.
	$\vdash (\exists x)(P \cdot Q) \supset (\exists x)P \cdot (\exists x)Q$	df.

Teo. 21. $\vdash (x)(P \supset Q) \equiv (\exists x)P \supset Q$

Prueba:	$\vdash (x)(\sim Q \supset \sim P) \equiv \sim Q \supset (x)\sim P$	**Teo.** 20
	$\vdash (x)(P \supset Q) \equiv \sim(x)\sim P \supset \sim\sim Q$	Ⓟ **y** R.R.
	$\vdash (x)(P \supset Q) \equiv \sim(x)\sim P \supset Q$	Ⓟ **y** R.R.
	$\vdash (x)(P \supset Q) \equiv (\exists x)P \supset Q$	df.

DR 6. $P \supset Q \vdash (\exists x)P \supset Q$

Prueba:	$P \supset Q$	**premisa**
	$(x)(P \supset Q)$	R 2
	$(\exists x)P \supset Q$	**Teo.** 21 **y** R.R.

Ejercicios de la Pág. 314

2. $(\exists x)(w)(z)(\exists u)(\exists v)(t)\{[F(u, v) \supset [G(t) \vee H(y)]] \cdot [[G(x) \vee H(y)] \supset F(w, z)]\}$

4. $(\exists y)(x)(\exists z)(w)[F(x, y) \supset F(z, w)]$

Ejercicios de la Pág. 316

1. $(\exists t)(x)(y)(z)\{\{[H(x) \vee H(y)] \vee H(z)\} \cdot \sim[D(t) \cdot \sim D(t)]\}$

3. $(\exists t)(y)(z)(\exists x)\{[G(x, y) \vee F(z)] \cdot \sim[D(t) \cdot \sim D(t)]\}$

Ejercicios de la Pág. 319

1. $(\exists x)(\exists z)(y)[F(x, y) \vee G(z)]$

3. $(\exists w)(\exists x)(\exists y)(t)\{\{[F(x, y) \cdot \sim[D(w) \cdot \sim D(w)]] \supset H(w, x)\} \supset H(w, t)\}$

Ejercicios de la Pág. 342

2. p **6.** $(p \cdot q) \vee r$ **10.** $p \vee \bar{p}$

Ejercicios de la Pág. 350

Teo. **2.** **Hay a lo más una entidad 1 en C tal que** $\alpha \cap 1 = \alpha$.

Prueba: **Suponer que hay entidades** 1_1 **y** 1_2 **tales que** $\alpha \cap 1_1 = \alpha$, $\alpha \cap 1_2 = \alpha$. **Entonces** $1_1 \cap 1_2 = 1_1$ **y** $1_2 \cap 1_1 = 1_2$. $1_1 \cap 1_2 = 1_2 \cap 1_1$ **por Ax. 6.**

Luego $1_1 = 1_2$ **mediante dos sustituciones de iguales por iguales.**

Teo. 7. $0 \neq 1$

Prueba: Suponer $0 = 1$. Entonces por Ax. 10 hay un α en **C** tal que $\alpha \neq 0$ y $\alpha \neq 1$. Sin embargo,

$\alpha \cap 1 = \alpha \cap 0$	por la hipótesis de que $0 = 1$.
$\alpha = \alpha \cap 0$	Ax. 4
$\alpha = 0$	Teo. 6

contrariamente a $\alpha \neq 0$. Luego, la suposición de $0 = 1$ debe ser falsa, así $0 \neq 1$.

Teo. 12. $\alpha \cup (\beta \cup \gamma) = (\alpha \cup \beta) \cup \gamma$

Prueba **Lema 1.** $\alpha \cup (\alpha \cap \beta) = \alpha$

Prueba:

$\alpha \cup (\alpha \cap \beta) = (\alpha \cap 1) \cup (\alpha \cap \beta)$	Ax. 4
$= \alpha \cap (1 \cup \beta)$	Ax. 8
$= \alpha \cap (\beta \cup 1)$	Ax. 5
$= \alpha \cap 1$	Teo. 5
$= \alpha$	Ax. 4

Lema 2. $\alpha \cap (\alpha \cup \beta) = \alpha$

Prueba:

$\alpha \cap (\alpha \cup \beta) = (\alpha \cup 0) \cap (\alpha \cup \beta)$	Ax. 3
$= \alpha \cup (0 \cap \beta)$	Ax. 7
$= \alpha \cup (\beta \cap 0)$	Ax. 6
$= \alpha \cup 0$	Teo. 6
$= \alpha$	Ax. 3

Lema 3. si $\alpha \cap \gamma = \alpha$ **y** $\beta \cap \gamma = \beta$ **Entonces** $(\alpha \cup \beta) \cap \gamma = \alpha \cup \beta$

Prueba:

$(\alpha \cup \beta) \cap \gamma = \gamma \cap (\alpha \cup \beta)$	Ax. 6
$= (\gamma \cap \alpha) \cup (\gamma \cap \beta)$	Ax. 8
$= (\alpha \cap \gamma) \cup (\beta \cap \gamma)$	Ax. 6
$= \alpha \cup \beta$	hipótesis

A. $\alpha \cap [\alpha \cup (\beta \cup \gamma)] = \alpha$	L. 2
$\beta \cap [\alpha \cup (\beta \cup \gamma)] = (\beta \cap \alpha) \cup [\beta \cap (\beta \cup \gamma)]$	Ax. 8
$= (\beta \cap \alpha) \cup \beta$	L. 2
$= \beta \cup (\beta \cap \alpha)$	Ax. 5
B. $\beta \cap [\alpha \cup (\beta \cup \gamma)] = \beta$	L. 1
C. $(\alpha \cup \beta) \cap [\alpha \cup (\beta \cup \gamma)] = \alpha \cup \beta$	por L. 3 a partir de A, B.
$\gamma \cap [\alpha \cup (\beta \cup \gamma)] = \gamma \cap [(\beta \cup \gamma) \cup \alpha]$	Ax. 5
$= [\gamma \cap (\beta \cup \gamma)] \cup (\gamma \cap \alpha)$	Ax. 8
$= [\gamma \cap (\gamma \cup \beta)] \cup (\gamma \cap \alpha)$	Ax. 5
$= \gamma \cup (\gamma \cap \alpha)$	L. 2
D. $\gamma \cap [\alpha \cup (\beta \cup \gamma)] = \gamma$	L. 1
E. $[(\alpha \cup \beta) \cup \gamma] \cap [\alpha \cup (\beta \cup \gamma)] = (\alpha \cup \beta) \cup \gamma$	por L. 3 a partir de C, D.
$\alpha \cap [(\alpha \cup \beta) \cup \gamma] = [\alpha \cap (\alpha \cup \beta)] \cup (\alpha \cap \gamma)$	Ax. 8
$= \alpha \cup (\alpha \cap \gamma)$	L. 2

F. $\alpha \cap [(\alpha \cup \beta) \cup \gamma] = \alpha$	L. 1
$\beta \cap [(\alpha \cup \beta) \cup \gamma] = [\beta \cap (\alpha \cup \beta)] \cup (\beta \cap \gamma)$	Ax. 8
$= [\beta \cap (\beta \cup \alpha)] \cup (\beta \cap \gamma)$	Ax. 5
$= \beta \cup (\beta \cap \gamma)$	L. 2
G. $\beta \cap [(\alpha \cup \beta) \cup \gamma] = \beta$	L. 1
$\gamma \cap [(\alpha \cup \beta) \cup \gamma] = \gamma \cap [\gamma \cup (\alpha \cup \beta)]$	Ax. 5
H. $\gamma \cap [(\alpha \cup \beta) \cup \gamma] = \gamma$	L. 2
I. $(\beta \cup \gamma) \cap [(\alpha \cup \beta) \cup \gamma] = \beta \cup \gamma$	**por L. 3 a partir de *G, H*.**
J. $[\alpha \cup (\beta \cup \gamma)] \cap [(\alpha \cup \beta) \cup \gamma] = \alpha \cup (\beta \cup \gamma)$	**por L. 3 a partir de *F, I*.**
$\alpha \cup (\beta \cup \gamma) = [\alpha \cup (\beta \cup \gamma)] \cap [(\alpha \cup \beta) \cup \gamma]$	*J*
$= [(\alpha \cup \beta) \cup \gamma] \cap [\alpha \cup (\beta \cup \gamma)]$	Ax 6
$\alpha \cup (\beta \cup \gamma) = (\alpha \cup \beta) \cup \gamma$	*E*

Teo. 20. **si** $\alpha \cap \beta \neq 0$ **y** $\beta \cap -\gamma = 0$, **Entonces** $\alpha \cap \gamma \neq 0$

Prueba: $(\alpha \cap \gamma) \cap \beta = \alpha \cap (\gamma \cap \beta)$	**Teo.** 13
$= \alpha \cap (\beta \cap \gamma)$	Ax. 6
$= (\alpha \cap \beta) \cap \gamma$	**Teo.** 13
$= [(\alpha \cap \beta) \cap \gamma] \cup 0$	Ax. 3
$= [(\alpha \cap \beta) \cap \gamma] \cup (\alpha \cap 0)$	**Teo.** 6
$= [(\alpha \cap \beta) \cap \gamma] \cup [\alpha \cap (\beta \cap -\gamma)]$	**hipótesis**
$= [(\alpha \cap \beta) \cap \gamma] \cup [(\alpha \cap \beta) \cap -\gamma]$	**Teo.** 13
$= \alpha \cap \beta$	**Teo.** 11
$(\alpha \cap \gamma) \cap \beta \neq 0$	**hipótesiss**
$\alpha \cap \gamma \neq 0$	**Teo.** 10

Símbolos Especiales

Indice Alfabético

— CH —

— D —

— E —

— Q —

— R —

— S —

— X —

— Y —

— Z —

Esta obra se terminó de imprimir en junio del 2001
en los talleres de Impresos Naucalpan, S.A. de C.V.
San Andrés Atoto No. 12, Col. San Esteban
C.P. 53550, Naucalpan, Edo de México

ISBN 968-26-0134-7
9 789682 601347

GRUPO
PATRIA
CULTURAL

COMPAÑÍA EDITORIAL CONTINENTAL